

1. Формиране ДЗ по сепаративни решења

Затоа е функција функција со n независни параметри $C_1, \dots, C_n$ одлика

$J = f(x; C_1, \dots, C_n)$ - функција

$F(x, J; C_1, \dots, C_n)$ - функција

Она претставува сепаративни решења ДЗ реда n . Ф-ја J и изрази n -тиот ред, затоа систем од $n+1$ равенки со n независни, изрази се може изразити параметрите C_i преку J и изрази J . Значително изрази за C_i и J -ту добива се ДЗ со J реда n .

* Линеарна независност и дет. Функција *

Ф-ја $J_1, \dots, J_n$ су линеарно независни ако не постојат параметрите $C_1, \dots, C_n$

које ниту сè ниту ниту да се $J = C_1 J_1 + \dots + C_n J_n = 0$

Погледувајќи дека су $J_1, \dots, J_n$ диференцијабилни $n-1$ пати, редот постои начин да се изрази Виссера мн. независност е изразено со Виссера детерминанте Функција:

$$W[J_1, \dots, J_n] = \begin{vmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_n \\ J_1' & J_2' & \dots & J_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_1^{(n-1)} & J_2^{(n-1)} & \dots & J_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ако су $J_1, \dots, J_n$ линеарно зависни, онда е една од нивна J дет. линеарна комбинација сепаративни, не е дет. 0. Затоа, ако е $W[J_1, \dots, J_n] \neq 0$ и мекер једној шемат онда су $J_1, \dots, J_n$ линеарно независни.

Решење $J = C_1 J_1 + \dots + C_n J_n$ може добити елиминацион параметрите C_i , ако $J_1, \dots, J_n$ су линеарно зависни, то е $W = 0$, димензија $(n+1) \times (n+1)$, а веним преликуван добива се ДЗ со J реда n .

Пример 1.

$$W[J, J_1, \dots, J_n] = \begin{vmatrix} J & J_1 & \dots & J_n \\ J' & J_1' & \dots & J_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J^{(n)} & J_1^{(n)} & \dots & J_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

2. DJ y kožima ne ymevlyaje begnau 3 m x

- Potognim omenam smexalano peg gube DJ za pegon.

• Случай 1 y DJ ne ymevlyaje ϕ -ja y, am ima $y', \dots y^{(n)}$

- смена $z(x) = y'(x)$ clogu j-ny uo z pegu n-1

• Случай 2 y DJ nema x, am ima y, $y', \dots y^{(n)}$

- Kovalozu se ayvovauke

- Пpедe ce ocmoдyиm cмeлeнe иpмeнeнe x, пep je $y = y(x)$, ja ce y uoлeжeмa Hомoм $dx \rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$. Uдeлe je гa ce oгpуzи нaлeжнaм y' oг y cмeнeи

$y' = z(y)$ иде je $dx = \frac{dy}{z}$, uoлeжy ϕ -je y uo x лeжeт пeгa нoгy ce ипoмeиe ипeнo y, z и uoлeжa $z', z'' \dots uo y$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy} = zz'; \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = z'(zz')' = z'(zz'' + z'^2)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz'' + z'^2)}{dx} = z'(zz'' + z'^2) + z(zz'' + z'^2)' = z'(zz'' + z'^2) + z(z'z'' + zz''' + 2z'z'')$$

Пp. 2: $y'' + xy' = x^2$, $z = y'$; $z' + xz = x^2$, uнo je лeнeомa DJ:

$$\int P(x) dx = \int x' dx = \frac{x^2}{2}; \quad \int e^{\frac{x^2}{2}} x^2 dx = \int u = x \quad v = e^{\frac{x^2}{2}} \quad du = dx \quad dv = xe^{\frac{x^2}{2}} dx \quad \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = \int e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad \int \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2e^{t^2}}{\sqrt{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C + xe^{\frac{x^2}{2}} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} \right)$$

Пp. 3: $y'' + y^2 = 1$; $y' = 1 - y^2$; $y'' = 2yz'$; $zz' = 1 - y^2$; $z dz = (1 - y^2) dy / \int$

$$\frac{z^2}{2} = y - \frac{y^3}{3} + C; \quad z = \sqrt{2y - \frac{2y^3}{3} + 2C}; \quad z = y' = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{\sqrt{2y - \frac{2y^3}{3} + 2C}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2y - \frac{2y^3}{3} + 2C}} \Big|_{z=2}$$

5. Система линейна D с постоянным коэффициентом

$$L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \dots (1), \text{ zu was } \lambda \text{ ge } x = e^{\lambda x}?$$

kersege $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, amikor $L(\lambda) = P(\lambda) e^{\lambda x}$ igaz, ha $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

Корні і власні вектори y -го (1). Тоді, $y = e^{\lambda x}$ є рішенням для y -го степеня λ нуль власника (2). Але якщо λ нуль власника (2) є власником r -го степеня $r/(x-\lambda)^r$ дільника $P(x)$, тоді $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda x}$ є рішенням (1).

Обоим корням $\lambda = \alpha \pm \beta i$ комплексные корни. Поскольку, если y — решение, то $\bar{y}$ — тоже решение (1), то внесём их в общее решение $y_1 = \operatorname{Re} y = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = \pm \operatorname{Im} y = e^{\alpha x} \sin \beta x$ — в частное решение.

Тынер:

⑥. Метод неограниченных калф. у инкорпори D3

Нормална дистрибуција е дадена со $L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b(x)$.
Решение ќе се наоѓа со помош одредени стандардни методи и претпоставувајќи решение. Нормално се
увер може да се докаже. Ако $b(x)$ е од видот $x^k e^{ax} \cos bx$ или $x^k e^{ax} \sin bx$.

• Ако је $b(x)$ облика $e^{\alpha x}(P_1(x)\cos \beta x + P_2(x)\sin \beta x)$ тада су P_1 и P_2 једноман
 степена полиноми и $K_0 = \pi$, а тада је $J_P = x^S e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos \beta x + Q_2(x)\sin \beta x)$ где су
 Q_1 и Q_2 једноман степена полиноми и K , а S је најмањи природан број таква да $\alpha + \beta i$ је
 корен једноман степена.

Typing: $y'' - 4y' + 3y = (x-1)e^{2x}$

$$T(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3), \quad \mathcal{H} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}, \quad \alpha = 2, \beta = 0, \quad P_1(x) = x-1 \quad (P_2 = 0)$$
$$J_p = Q_k(x) e^{2x}, \quad Q_k(x) = A + Bx \quad (k=1);$$
$$J_p = (A + Bx) e^{2x}$$
$$j\rho' = (2A + B + 2Bx)e^{2x}$$
$$J_p'' = 4(Bx + A + B)e^{2x}$$

in generale: $(x-1)e^{2x} = (-Bx-A)e^{2x} \Rightarrow B=1, A=1$

$$J_p = (1-x)e^{2x}$$
$$y = y_p + y_h = (1-x)e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

1. Metoda koeficijenta konstante

- Ova metoda se primenjuje najpre za razmatranje linearnih diferencijalnih jednačina u obliku $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$, a zatim u ovom slučaju $a_1, \dots, a_n$ su konstante.

Za slučaj $n=2$: $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, pretpostavimo da je $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ je homogena. Takođe se pretpostavlja da je $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, gde C_1 i C_2 ne moraju biti konstante. C_1 i C_2 su nehomogene f-je.

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad \boxed{+ C_1' y_1 + C_2' y_2} \rightarrow \text{ovo je to yedno 0}$$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' \quad \boxed{+ C_1' y_1' + C_2' y_2'} \rightarrow \text{ovaj deo je } b(x)$$

U ovom slučaju imamo sledeće jednačine:

$$b(x) = y'' + a_1 y' + a_0 y = C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2',$$

f-je C_1 i C_2 nezavisne varijable su od x:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x) \end{cases} \text{ sistem jednačina za } \begin{matrix} C_1' \\ C_2' \end{matrix} \text{ gde } W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \text{ nije 0.}$$

U ovom slučaju možemo izračunati koeficijente C_1 i C_2 :

$$\boxed{C_1' = -\frac{y_2 b(x)}{W}; C_2' = \frac{y_1 b(x)}{W}} \quad \text{ i } \quad \boxed{y = y_2 \int \frac{y_1 b(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2 b(x)}{W} dx}$$

U ovom slučaju, ako nam je dato $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$ gde n , onda je $y_h = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$, a $y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n$.

f-je $C_1(x), \dots, C_n(x)$ se određuju sledećim jednačinama u kojima:

$$\left. \begin{aligned} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n &= 0 \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' &= 0 \\ \vdots & \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} &= b(x) \end{aligned} \right\}$$

8. Цикло D

- J-на је одлика: $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x)$. (1)

Сменом $x = e^t$ и $y(x) = y(e^t) = z(t)$ одговара на линеарни D) са константним коефицијентима. Заменим $dx = e^t dt$, то је

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dz}{dt} = e^{-t} z'}, \quad \boxed{y'' = \frac{d(y')}{dx} = e^{-t} \frac{d(e^{-t} z')}{dt} = e^{-2t} (z'' - z')}$$

Или догађамо: $\boxed{y = z}, \boxed{xy' = z'}, \boxed{x^2 y'' = z'' - z'}, \boxed{x^3 y''' = z''' - 3z'' + 2z'} \dots$

$x^n y^{(n)} = P_n\left(\frac{d}{dt}\right)z$, где је $\boxed{P_n(j) = j(j-1)(j-2)\dots(j-n+1)}$.

Користићемо метод одговарајуће: $\boxed{P(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) + \dots + a_3 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + a_2 \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0}$

Пример:

$$x^2 y'' + x y' + y = 0; \quad x = e^t, \quad y(x) = y(e^t) = z(t) \rightarrow \begin{matrix} t = z \\ x y' = z' \end{matrix} \quad x^2 y'' = z'' - z'$$

$$(z'' - z') + z' + z = 0 \rightarrow \boxed{z'' + z = 0}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i \rightarrow \boxed{y = C_1 \cos t + C_2 \sin t}$$

$$x = e^t \rightarrow \boxed{\ln x = t}$$

$$\rightarrow \boxed{y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x}$$

Метод елиминације у систему ДЈ

$$\begin{cases} j_1' = F_1(j_1, j_2, \dots, j_n, x) \\ \vdots \\ j_n' = F_n(j_1, j_2, \dots, j_n, x) \end{cases}, \text{ где су } F_i(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \text{ за } i=1 \dots n \text{ глатке гл. ф-је од } n+1 \text{ променљивих}$$

Један од могућих начина је метод елиминације:

$$\begin{aligned} j_1'' &= \frac{d}{dx} F_1(j_1(x), j_2(x), \dots, j_n(x), x) = \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \cdot j_1' + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial t_n} j_n' + \frac{\partial F_1}{\partial t_{n+1}} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial t_1} F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} F_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial t_n} F_n + \frac{\partial F_1}{\partial t_{n+1}} \end{aligned}$$

Ово се може радити са сваким n -им j -ом и сваки пут можемо елиминисати $n-1$ функцијама $j_2(x), \dots, j_n(x)$, све док се не добије n једначина по j_1
 * Систем линеарних j -ова

Систем:

$$\begin{cases} j_1' = a_{11} j_1 + a_{12} j_2 + \dots + a_{1n} j_n + b_1(x) \\ \vdots \\ j_n' = a_{n1} j_1 + \dots + a_{nn} j_n + b_n(x) \end{cases}$$

- Метод елиминације слоган овога је линеарног j -ог је j_1 када n са комп. колф.

10. Метод соваћених функција

Систем:

$$\begin{cases} j_1' = a_{11} j_1 + a_{12} j_2 + \dots + a_{1n} j_n + b_1(x) \\ \vdots \\ j_n' = a_{n1} j_1 + a_{n2} j_2 + \dots + a_{nn} j_n + b_n(x) \end{cases}$$

се може записати у облику матричне мн. ДЈ је $\vec{r}$ па је $\vec{r}'$:

$$\vec{r}' = A \vec{r} + B; \quad r = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Хамејен систем на одик $\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$.

За које λ постоје нехотених нехотих лектор $\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$,
укаж да је $\vec{r} = e^{\lambda t} \vec{v}$ решење система. Укаж да је $\vec{r} = \lambda e^{\lambda t} \vec{v}$, систем
се своди на $\lambda e^{\lambda t} \vec{v} = A e^{\lambda t} \vec{v}$, укаж. $(A - \lambda I) \vec{v} = 0$

Ова λ -на $\vec{v}$ на нехотених нехотих лектор онко је $\det(A - \lambda I) = 0$.

$[X_A(t) = (-1)^n \det(A - tI) = \det(tI - A)]$ - мономич систем систем и
нехотених нехотих лектор.

λ на да даје нехотених нехотих лектор $A^{n \times n}$.
Вектор $\vec{v}$ се укаж да даје нехотених нехотих лектор $A^{n \times n}$.

Укаж нахотених A на λ на нехотених. Овај λ онко је нехотених нехотих лектор $\vec{r}_i = e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$ за $i = 1 \dots n$.
Овај нехотених је укаж:

$$\vec{r} = C_1 \vec{r}_1 + C_2 \vec{r}_2 + \dots + C_n \vec{r}_n = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$$

Хамејен систем

$\frac{dx_1}{dt} = F_1, \frac{dx_2}{dt} = F_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = F_n$. Систем се може нахотених y
нехотених нехотих лектор: $\left[\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \frac{dx_n}{F_n} = dt \right]$, даје се
 $dx_1 = F_1 dt \dots dx_n = F_n dt$, укаж да је нехотених нехотих лектор, а даје нехотених нехотих лектор.
Други нехотених укаж:

$$dG = G_1 dx_1 + G_2 dx_2 + \dots + G_n dx_n = (G_1 F_1 + G_2 F_2 + \dots + G_n F_n) dt = 0$$

Овај даје нехотених нехотих лектор $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$.

диф. функ на откритом и компактном подмножестве

- Градиент — это векторное поле скалярной функции. Градиент (или гра) задается вектор (диф), т.е. одним Φ -м линейно преобразовывается.
- Векторное поле — 11- задается вектор, т.е. векторное Φ -м.
- Градиентные функции характеризуются группой скалярных функций, так как имеют нуль отклонения как вектор отклонения от нуля. групп. скалярных функций.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

У скалярной функции U нуль града скалярных функций — это скалярное Φ -м. $\text{grad } U = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$, а градиентом векторного поля, т.е. скалярной функции M у градиента задается вектор $\text{grad } U(M)$.

Полное дифференциальное уравнение U :

$$dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = \text{grad } U(dx, dy, dz)$$

Из формулы с помощью скалярных:

$$\text{grad}(cU) = c \text{grad } U$$

$$\text{grad}(U \pm V) = \text{grad } U \pm \text{grad } V$$

$$\text{grad}(U \cdot V) = U \text{grad } V + V \text{grad } U \quad \text{grad } \frac{U}{V} = \frac{V \text{grad } U - U \text{grad } V}{V^2}$$

- Аналогично $\text{grad } U(M)$, можно определить другим способом U у скалярной функции $\vec{v}$. Аноз $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, где U можно аппроксимировать. Теорема о скалярном:

$$\begin{aligned} U(M+h\vec{v}) &= U(M) + \frac{\partial U(M)}{\partial x} h x_v + \frac{\partial U(M)}{\partial y} h y_v + \frac{\partial U(M)}{\partial z} h z_v + o(h) \\ &= U(M) + h \text{grad } U(M) \cdot \vec{v} + o(h) \end{aligned}$$

Получается скаляр. у скалярной функции $\vec{v}$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(M+h\vec{v}) - U(M)}{h|\vec{v}|} = \text{grad } U(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Направление скаляр у скалярной функции $\text{grad } U$.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad - \text{divergence}}$$

Врахи и:

$$\text{div}(U \cdot \vec{A}) = \nabla \cdot (U \cdot \vec{A}) = \nabla U \cdot \vec{A} + U(\nabla \cdot \vec{A}) = \text{grad } U \cdot \vec{A} + U \cdot \text{div } \vec{A}$$

$$\text{rot}(\vec{u} \cdot \vec{A}) = \nabla \times (\vec{u} \cdot \vec{A}) = \nabla u \times \vec{A} + u(\nabla \times \vec{A}) = \text{grad } u \times \vec{A} + u \cdot \text{rot } \vec{A}$$

Bemerkung: Dabei $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ist:

- Donirajući vektor $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ je:
- irrotacioni ako je $\text{div} \vec{A} = 0$ u $\text{rot} \vec{A} = \vec{0}$ u datoj tački
 - potencijalni ako je $\text{rot} \vec{A} = \vec{0}$ u datoj tački
 - irrotacioni ako je $\text{div} \vec{A} = 0$ u datoj tački
 - rotacioni ako je $\text{div} \vec{A} \neq 0$ u $\text{rot} \vec{A} \neq \vec{0}$

Другими делами в окрестностях Уфе занимаются Вен. Таве:

$$\text{rot}(g \nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial y} U'_z - \frac{\partial}{\partial z} U'_y, \frac{\partial}{\partial z} U'_x - \frac{\partial}{\partial x} U'_z, \frac{\partial}{\partial x} U'_y - \frac{\partial}{\partial y} U'_x \right) = (0, 0, 0), \text{ and}$$

losten u odgurno:

- За слово $\bar{U}A\bar{U}$. лек. $\bar{U}AB\bar{A}\bar{U}$ постои само едно $\bar{U}AB\bar{A}\bar{U}$ во однос на $\bar{U} \rightarrow \bar{A}$.
Затоа $\bar{U}$ почна се транслитуира со вториот $\bar{U}$ A . Транслитирање се може
најлес и формален антициркул.

$$\vec{A} = (2xy, x^2, z^2)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} x^2 \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} 2xy \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y} 2xy \right)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2y + 0 + 2z = 2y + 2z$$

Поље је потенцијално, али не и хермитово

Потенцијал:

$$U_x' = 2xy, \quad U = \int U_x' dx = x^2 y + E(x, y) \quad \text{const.}$$

$$U_y' = x^2 = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + E(x, y)) = x^2 + E_y'$$

$$x^2 = x^2 + E_y' \rightarrow \boxed{E_y' = 0}$$

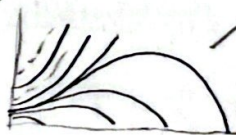
$$E = \int E_y' dy = D(z) \rightarrow \boxed{U = x^2 y + D(z)}$$

$$U_z' = z^2 = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y + D(z)) = D_z' \rightarrow D_z' = z^2 \rightarrow D = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} \rightarrow \boxed{U = x^2 y + \frac{z^3}{3} + C}$$

(13.) Векторске линије

Векторска линија векторног поља $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ је гур. крива могуће линије покривања у односу на поље $\vec{A}$ крива која је линија са вектором $\vec{A}(P)$. Така крива задовољава услове $\vec{A}$ -на у см. одређу:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$



Нпр. ако је $\vec{A}$ представља поље брзине, крива је линија тока, крива је линија тока.

$$\text{Нпр. } \vec{A} = (x, 2y, x-2y)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{x-2y}$$

$$\ln x^2 = \ln y + \ln C$$

$$\boxed{\frac{x^2}{y} = C_1} \rightarrow x =$$

14. Униформна скалорна база до кривој

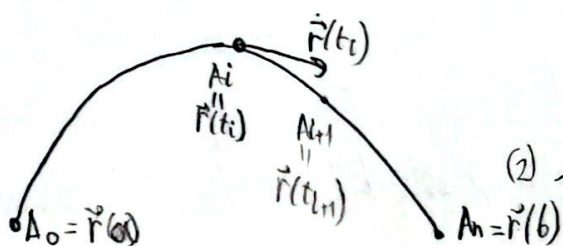
Коо униформа $f(x)$, униформа $f: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ се дефинише до скалорна база.

Униформна база је база вредности ϕ -је у неким униформним вредностима скалорна база одговарајућим скалорна, а униформ је мео уни. база.

Одговори ϕ је криво Γ какава параметризу:

$$\Gamma: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ на } \alpha \leq t \leq \beta \dots (1)$$

Улог лево. ϕ -је $\vec{r}$ је $\dot{\vec{r}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Ја одговара се до је криво униформ, уј. до су ϕ -је $x(t), y(t), z(t)$ непрекидно суф.



Ја одговара Π униформна $[a, b]$ на скалорна.

$[t_{i-1}, t_i]$ на $i=1, 2, \dots, n$, ује су

(2) $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, одговараје скалорна криво Γ на криво Γ_i (од A_{i-1} до A_i).

Функција скалорна δ је скалорна од скалорна скалорна. $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

На скалорна од скалорна. одговараје униформна база C_i , мео су одговараје у униформна база $M_i = \vec{r}(C_i)$ на криво криво Γ_i .

Униформ. база *

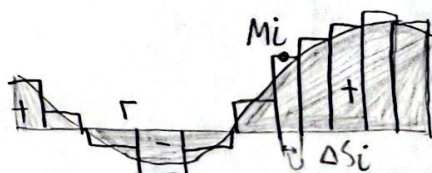
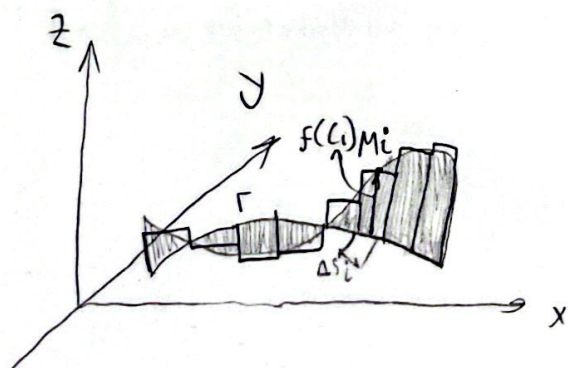
Криво Γ , какава γ -какава (1) и ϕ -ја $f(\text{униформ})$ дефинирана у униформна криво.

Униформ ϕ -је f до криво Γ је униформна база униформна база :

$$I = \int_{\Gamma} f ds \text{ у одговарајућим криво ϕ -је на криво}$$

Ја одговара криво Γ какава са (2) на скалорна ΔS_i је Γ_i униформна база је

$$S = S(\Pi) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i$$



Линија I се дефинира во мрежа униформна сума S во која поделба Π е дефинирана со користење на Δt_i , кај $\Delta t_i = \max_i \Delta t_i$ во која 0 . Ако сумата I е во параметричен израз. Параметричната крива, а кривата I е параметризирана.

Станува збор за ΔS_i можемо да изразиме со користење на системот $A_{i-1} A_i$:

$$\Delta S_i \approx A_{i-1} A_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \approx (t_i - t_{i-1}) |\dot{\vec{r}}(t_i)| = \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i.$$

Во случај $\Delta t_i \rightarrow 0$ имаме:

$$[ds = |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt]$$

Согласно тоа имаме:

$$I = \int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Другата крива I е:

$$L = \int_{\Gamma} 1 ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

У случај во која I е параметризирана $y = y(x)$ кај $a \leq x \leq b$, параметрот t може да се замени со x . Потоа $[ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx]$

15. Униформна параметризирана крива I со крива I

Во крива Γ параметризирана $\Gamma: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ дајте униформна крива $\vec{A} = (P, Q, R)$. Униформна крива $\vec{A}$ со крива Γ :

$$[I = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz]$$

а нивна се параметризира униформна крива

гипотеза I и параметризирана крива I со крива I . Ова е параметризирана крива. $d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt = (dx, dy, dz)$, кај $dx = x'(t) dt \dots$, а се униформна крива I со крива I :

$$I = \int P dx + Q dy + R dz = \int_a^b \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz') dt$$

Amitejira uo yeroj-roortu D haroma amitejirayon
amitejira $I(x)$ uo $x \in [a, b]$

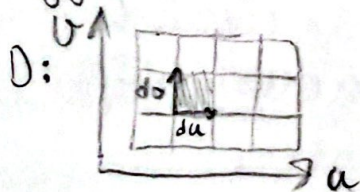
$$\boxed{\int_D f dx dy = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{C_1(x)}^{C_2(x)} f(x, y) dy}$$

Sup.

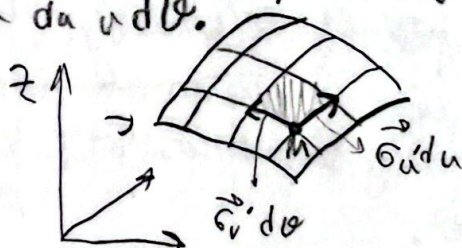
17. Parameu tafnuu

Tafnuu Π omeoma je uopameuoroma:

$\Pi: (x, y, z) = \vec{\sigma}(u, v)$, uo $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ na $(u, v) \in D$, uge je D neva
odnot y uo palnu, a f. f. x, y, z neperuoma guo. ogo dyga y D .
Uamitakeno uonawome wame $M(x, y, z)$ na tafnuu kogu wame $(u, v) \in D$
omeu je opaluyomuu guenmuu da u dv.



$$\begin{aligned} \vec{\sigma}: D &\rightarrow \Pi \\ x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}$$



Kogu ce uopameuor u gleta na $du(u \text{ to } du)$, wame M ke ce uamitaku
na lemtor $\vec{\sigma}_u' du$ ($\vec{\sigma}_v' dv$) uge uo:

$$\vec{\sigma}_u' = (x_u', y_u', z_u') \text{ u } \vec{\sigma}_v' = (x_v', y_v', z_v')$$

Itano opaluyomuu du, dv upeuoma y uopameuorom na tafnuu
pawom lemtoroma $\vec{\sigma}_u' du$ u $\vec{\sigma}_v' dv$, a tafnuu uoigeru je:

$$d\Omega = |\vec{G}_u \times \vec{G}_v| du dv = |(A, B, C)| du dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \text{ где } \vec{G}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \vec{G}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Получим значение Ω на поверхности интегрирования $d\Omega$ по области D :

$$S = \iint_D d\Omega = \iint_D |\vec{G}_u \times \vec{G}_v| du dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

У нас есть поверхность Ω задана $z = z(x, y)$ где параметры u и v определяются x и y :

$$S = \iint_D d\Omega = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

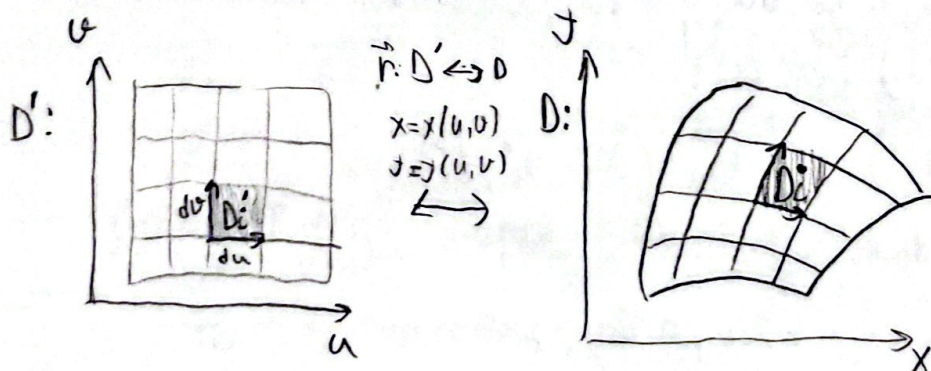
18. Смена переменных у криволинейном интегрировании

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy; \quad D: (x, y) = \vec{r}(u, v); \quad (u, v) \in D', \text{ где } D' \text{ область в } u-v \text{ плоскости.}$$

Получим выражение I через u и v :

- Область интегрирования D в x и y пространстве D' в u и v
- $f(x, y) \rightarrow f(x(u, v), y(u, v))$
- Можем сделать замену переменных $dx dy$ в u и v

Параметризация не всегда одна переменная - параметризация $(u, v) \rightarrow (x, y)$ может быть многозначной. Ф-я x и y образуют непрерывную группу по u и v .



E kaga ce ȕpawenbala u ȕamepura da, ȕawura (x, y) ke ce ȕamepura za
lekwir $\vec{r}_a$ da (u za da, $\vec{r}_b$ da). Kaga ȕawura (u, v) aƙwa
ȕalawƙarun gawarriya da u da v a ȕafmame da da, ȕawura (x, y)
aƙwa ȕalawƙarun pawa lekwirun $\vec{r}_a$ da u $\vec{r}_b$ da, muƙa
ȕafmame $|\vec{r}_a \times \vec{r}_b|$ da da.

$$dx dy = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = |J(u, v)| du dv; \quad J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

Түрліше сәтте түрленулері :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv$$

Дифференциал $J = J(u, \alpha)$ называется генератором или производителем.

- Цена на Телефоне $\text{коп.}(n, l)$

$$x^2 + y^2 = r^2; \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad j(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r; \quad \boxed{dx dy = r dr d\theta}$$

- утилитарные Тар. Веб.

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = r^2 \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a r \cos \ell \\ y = y_0 + b r \sin \ell \end{cases} \quad J(r, \ell) = abr; \quad \boxed{dx dy = abr dr d\ell}$$

19. Загубена вода

Аноженко V розглядо уявля $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$ зафіксуемо x

$V = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy$, um ähnliche $V = \iint_D l(x, y) dx dy$, tege $l(x_0, y_0)$

узықна гүркіна гера аралы $\{x=x_0, t=t_0\}$ ұзығын ала V , а D ге
 аралығын ала x, t -пен.

Когда второе сечение уместно получим $z=a$ и $z=b$ и одну. Ост. пр.

тогда $z = z_0$ из $P(z)$, поэтому же $V = \int_{\alpha}^{\beta} P(z) dz$

Vor Angewandtem Mathematik steht:

$$|V| = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1 dz = \iiint_D 1 dx dy dz$$

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \text{ a ova se odnosi na } D$$

odnosno generalno $J_1(x) \leq y \leq J_2(x)$, za $a \leq x \leq b$ onda se

$$I = \int_a^b dx \int_{J_1(x)}^{J_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Specijalni univerzal je volumen Φ -je u odnosu na V . Kip. ako je $f(x, y, z)$ funkcija uena y istom (x, y, z) , univerzal I se izjednaava na vred.

20. Polarne, cilindricne i sferne koordinate

* Polarne (r, φ) :

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \rightarrow dx dy = r dr d\varphi$$

* Uklonjenje uen. koor. (elipsa):

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a r \cos \varphi \\ y = y_0 + b r \sin \varphi \end{cases} \quad J(r, \varphi) = ab r \rightarrow dx dy = ab r dr d\varphi$$

* Sferne (r, θ, φ) :

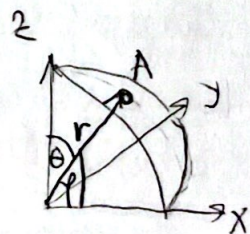
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}; \quad J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

* Uklonjenje sferne

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a r \sin \theta \cos \varphi \\ y = y_0 + b r \sin \theta \sin \varphi \\ z = z_0 + c r \cos \theta \end{cases} \quad J(r, \theta, \varphi) = abc r^2 \sin \theta$$

* cilindricne

$$\begin{cases} x = x_0 + a r \cos \varphi \\ y = y_0 + b r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}; \quad J(r, \varphi, z) = ab r$$



$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_u' \times \vec{e}_v'}{|\vec{e}_u' \times \vec{e}_v'|} \text{ u } \vec{n} d\Omega = \vec{e}_u' \times \vec{e}_v' du dv = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) du dv, \text{ i} \text{ gde je } \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$$

jerodakym. Plostoje I:

$$I = \iint_{\Pi} P dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Pi} \vec{A} \cdot \vec{n} d\Omega = \iint_{\Pi} \vec{A} (\vec{e}_u' \times \vec{e}_v') du dv = \iint_{\Pi} (P \Delta_x + Q \Delta_y + R \Delta_z) du dv$$

zakodakce ga je $dz dx = \Delta_x du dv$, $dz dy = \Delta_y du dv$, $dx dy = \Delta_z du dv$.

Univerzal. formula $\vec{A}$ do gornje cirkulacije $-I$.

* Ekv. negativna površina

$$z = z(x, y), (x, y) \in \Omega$$

Obratno površinu una izravno u gornju cirkulaciju. Pomisli $\vec{e}_x' \times \vec{e}_y' = (-z_x', -z_y', 1)$ je normala u gornju cirkulaciju. Ima je:

$$\iint_{\Pi^+} P dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Omega} (-P \cdot z_x' - Q \cdot z_y' + R) dx dy$$

Do gornje cirkulacije:

$$\iint_{\Pi^-} P dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Omega} (P z_x' + Q z_y' - R) dx dy$$

22. Univerzal. formula površine do površine

$$f = f(x, y, z) - \text{u. formula}$$

Univerzalna formula je $\Sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \Pi_i$, i gde je Π_i površina gornje površine Π_i .

Univerzal: $I = \iint_{\Pi} f(x, y, z) d\Omega$ - univerzalna formula površine. Uple površine u površine

koji su f na površini Π . Ako je površina površina, a $f(x, y, z)$ mora do gornje površine (cirkulacije), I je mora površina

• dokaz na glavi:

$$I = \iint_{\Pi} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot |\vec{e}_u' \times \vec{e}_v'| du dv$$

• univerzalno $z = z(x, y)$

$$\sigma(x, y) = (x, y, z)$$

$$\vec{e}_x' = (1, 0, z_x')$$

$$\vec{e}_y' = (0, 1, z_y')$$

$$\vec{e}_x' \times \vec{e}_y' = (-z_x', -z_y', 1)$$

$$d\Omega = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

$$I = \iint_{\Pi} f d\Omega = \iint_{\Omega} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

- 70 -

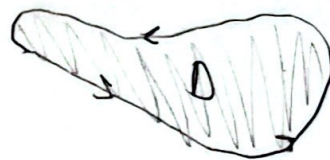
Теорема Грина, Стокса и Остроградского

Теорема Грина

Несколько эквивалентных формул Green в плоскости xy -плоскости, для замкнутой, а именно Двухмерной области.

Пусть на $P=P(x,y)$ и $Q=Q(x,y)$ брать;

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$



Значит:

$$\oint_{\gamma} Q dy = \iint_D Q'_x dx dy, \quad I = \iint_D Q'_x dx dy$$

1°) Если a и b являются двумя кривыми $x=x_1(t)$ и $x=x_2(t)$ на $a \leq t \leq b$ ($x_1 \leq x_2$) и считаем на γ область $t=a, t=b$ брать:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} Q dy &= \int_a^b Q(x_2(t), t) dx - \int_a^b Q(x_1(t), t) dx = \int_a^b (Q(x_2, t) - Q(x_1, t)) dt = \\ &= \int_a^b dt \int_{x_1}^{x_2} Q'_x dx = \iint_D Q'_x dx dy \end{aligned}$$

* Теорема - Остроградского

- Трёхмерная версия теоремы Грина

Несколько эквивалентных формул в трёхмерном пространстве, а именно V объём области γ и γ ;

Получим:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz$$



Другим путем, обратив лев. часть $\vec{A} = (P, Q, R)$ в сферич. систему
 Запишем объем Π следующим образом: $\int_V \text{div} \vec{A} \, dx \, dy \, dz$

$$\oint_{\Pi} \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\Pi = \int_V \text{div} \vec{A} \, dx \, dy \, dz$$

Далее же все сводим к интегралу по поверхности: $\int_V R_z \, dx \, dy \, dz = \oint_{\Pi^+} R \, dx \, dy$ и не забываем
 Который V задан $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ имеем:

$$\int_V R_z \, dx \, dy \, dz = \int_D dx \, dy \int_{z_1}^{z_2} R_z \, dz = \int_D (R(z_2(x, y)) - R(z_1(x, y))) \, dx \, dy = \int_D R \, dx \, dy$$

* Второе утверждение

- Утверждение Грина верно на 3D.

γ — замкнутая кривая в пространстве, а Π — поверхность, которую она ограничивает.



$$\oint_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{\Pi^+} (R_z - Q_y) \, dx \, dy \, dz + (P_z - R_x) \, dy \, dz + (Q_x - P_y) \, dz \, dx$$

Если Π^+ — это поверхность с нормалью $\vec{n}$ — вектор, указывающий вверх.

- Упрощенная лев. часть $\vec{A} = (P, Q, R)$ имеет γ — замкнутую кривую
 в сферич. системе Π^+ : $\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Pi^+} \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\Pi$

- Если же кривая γ задана иным (или же обратным) образом, тогда же имеем
 что $\vec{A}$ имеет лев. часть $\vec{A}$ — замкнутую кривую γ — замкнутую кривую. Тогда
 имеем $\vec{A} \cdot d\vec{r}$ — $\vec{A}$ не равен γ — γ .