АУТОМАТСКО

ГРУПА А

② Разлика између улазне и излазне величине. Пример. Дефинишуће улазне и излазне величине.

① Разлика између физичког и математичког модела

- <u>физички систем</u> – издвојени део простора у коме су материја и енергија функционално повезане и код кога постоји повезаност са осталим просторима
- <u>математички систем</u> – издвојени део мат. простора, чији су делови, елементи и јединице међусобно повезани
- <u>организовани физ. систем</u> – скуп подсистема међусобно повезаних у целину са циљем да се оствари одређени задатак, а на основу размене материје, енергије, информација између подсистема у оквиру система
- <u>структура</u> система обухвата све битне подсистеме са свим низовима међусобних сврстаја и везама са околином

Величина која битно утиче на рад система, а настала је као њена је <u>улазна величина</u>. Означава се X_u, а њена вредност у t је $X_u(t)$. Ако систем има више улаза до X_m, онда се уводе за елементе M-димензионалног <u>вектора улаза</u>. $X_u \in R^M$

$$\boxed{X_u = \begin{bmatrix} X_{u1} \\ X_{u2} \\ X_{um} \end{bmatrix} = \left[X_{u1}, X_{u2}, \dots, X_{um}\right]^T}$$

akademijazamasince.com

Брзина струјања ваздуха утиче на кретање авиона и зато је његова улазна величина. Интензитет топлотног зрачења битно утиче на температуру и притисак ваздуха у простору па је његова улазна величина.

Код регулатор дејства улазних величина уклањају се реакције у виду кретања, процеса, рада.

Scanned with CamScanner

Величина која представља резултат динамичког понашања система, а за чије вредности смо заинтересовани, назива се <u>излазна величина</u>. Означава се са X_i, а вредност у t је $X_i(t)$. Ако има више излазних величина X_N, онда се оне уређују за попуњавање N-димензионалног <u>вектора излаза</u>. $X_i \in R^N$

$$\boxed{X_i = \begin{bmatrix} X_{i_1} \\ X_{i_2} \\ \vdots \\ X_{i_N} \end{bmatrix} = \left[X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_N}\right]^T}$$

Излазна величина система је резултат рада система, и ми смо за њу заинтересовани. Резултат је врсте система, дејства улаза и почетних услова, представља стварну реакцију система на ова дејства, и мења се са временом.

Брзина аутомата је излазна величина. Степен загађености стварне површине аутомата је такође резултат лета, али је без битног значаја, па није излазна величина.

③ Статички и динамички системи. Примери

Реакција система је у односу реакције на улазна дејства.

<u>Статички</u> системи се карактеришу тренутном реакцијом на улазно дејство. Реакција не зависи од понашања система у прошлости, нити претходних услова. Зато кажемо да је систем стационарни ако вредност излазне величине у неком t зависи само од улазне величине.

$$\boxed{X_i(t) = f(X_u(t))}$$

Пример таквог система је прекидач за светло.

<u>Динамички</u> систем је систем где његов излаз зависи од предисторије промене улаза, тј. зависи од тренутне ситуације система.

Scanned with CamScanner

Пример таквог система је банковни рачун, где су улазне и излазне улоге, а само излазна величина. Неопходно је знати капитену историју улазних вел. да би закључили стање рачуна.

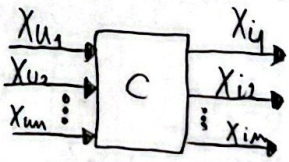
Грешка аута се бележено болетала пријатељица, сада се не жели мит се удати кита, лек не делује мит се батиде... то су све примери.

4. Појам и дефиниција дијаграма система. Графика илустрација.

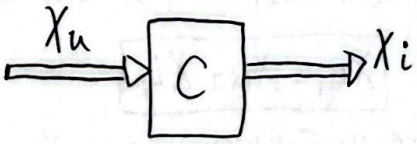
Симболички приказ система правоугаоником, при чему су све улазне вел. ($X_{u_1}, \dots X_{u_m}$) система симболички приказане стрелицама на правоугаоник C, а све излазне величине ($X_{i_1}, \dots X_{i_m}$) генерене су од правоугаоника C. Односно вектор X_u је на C, а X_i од C. Овакав дијаграм се назива <u>дијаграм система</u>. Стрелице представљају <u>сигнале односајуће величине.</u>

Дијаграм који је рационалан, детаљан, тако да је приказана структура система, која показује све јединице система и њихова међусобна дејства, назива се <u>структурни дијаграм система.</u>

а) скаларни облик

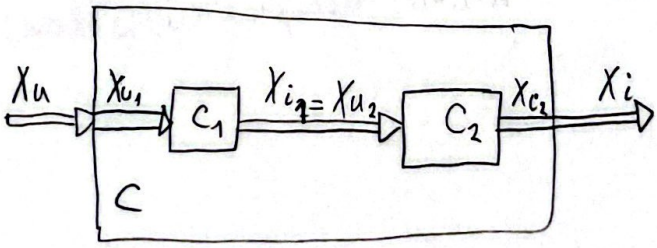


б) векторски облик



5. Дефиниција редне спреге система. Графика илустрација

Ако се систем C састоји из два подсистема (C_1 и C_2), који су повезани тако да је улаз X_u целог система C истовремено и једини улаз X_{u_1} подсистема C_1, а његов излаз X_{i_1} је једини улаз X_{u_2} подсистема C_2, чији је излаз X_{i_2} истовремено излаз X_i целог система C, онда су C_1 и C_2 <u>редно везани (спрегнути)</u>, а систем је <u>редна спрега.</u>



Scanned with CamScanner

⑥ Дефинисање паралелне спреге система. Графичка илустрација.

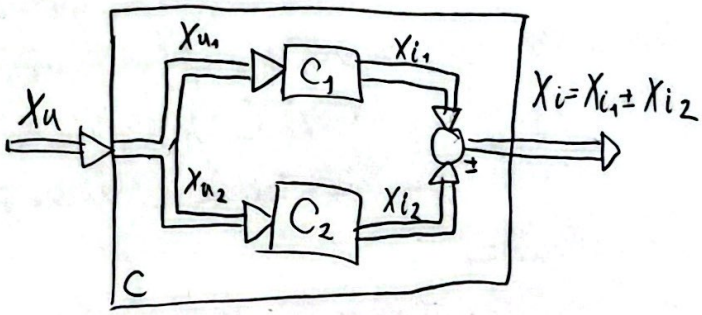
Ако се систем C састоји из два подсистема (C_1 и C_2), који су улази X_{u_1} и X_{u_2} једнаки улазу X_u целог система,

$$\boxed{X_{u_1} = X_{u_2} = X_u}$$

а алгебарски збир излаза X_{i_1} подсистема C_1 и излаза X_{i_2} подсистема C_2 представља излаз целог система,

$$\boxed{X_i = X_{i_1} \pm X_{i_2}}$$

тада су подсистеми C_1 и C_2 паралелно спрегнути, а систем C је паралелна спрега.

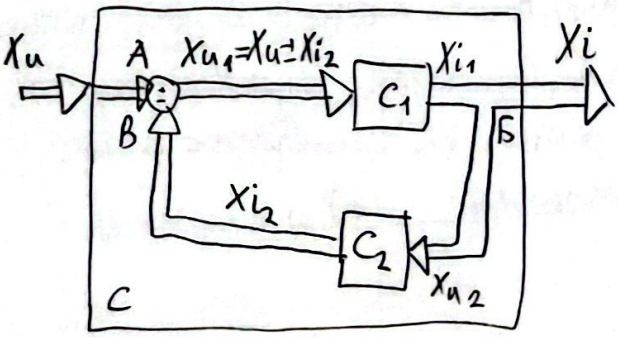


⑦ Дефинисање повратне спреге система. Графичка илустрација

Ако се систем C састоји из два подсистема C_1 и C_2, при чему је једини улаз X_{u_1} подсистема C_1 једнак алгебарском збиру улаза X_u целог система C и излаза X_{i_2} подсистема C_2,

$$\boxed{X_{u_1} = X_u \pm X_{i_2}}$$

а његов излаз X_{i_1} је истовремено излаз X_i целог система C и један улаз X_{u_2} за C_2, тада цео систем C називамо систем са повратном спрегом.



А-Б: Главна спрега система

Б-В: повратна спрега (грана)

позитивна АКО се у збиру налази знак (+) X_{i_2}

негативна АКО се у збиру налази знак (-) X_{i_2}

А-Б-В: затворена спрега (коло) система

8.) Дефинишуће објекта аутоматског управљања. Пример.

Објект (О) је систем од кога се захтева да у прагиченим (номиналним) радним условима оствари прагичено динамичко понашање, а у произвољним радним условима динамичко понашање које може да одступи од његовог задатог динамичког понашања највише у дозвољеним границама, а који то не може сам да оствари.

На пример, од шертолетиране се захтева да пратеће одређену кол. енергије, уз прагичени степен некорисности. Брод им алиса се креће одређеним правцем по дефинисаном курсу.

9.) Дати и дефинисати променљиве величине објекта, вектора променљивих објекта. Означавање. Пример

Укупна величина објекта која изазива одступање његовог стварног динамичког понашања од задатог понашања, а настаје и мења се независно од његовог задатог динамичког понашања је његова променљива величина, у ознаци Z, а оно их има више $z_1, z_2, \dots, z_p$, могу да се уведе за елементе p-димензионалног вектора променљивих Z, $Z \in R^p$

$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1, z_2, \dots, z_p \end{bmatrix}^T}$$

Ветар изазива скретања алиса им брода са задатог курса, повећање пошрашене ел. ен. изазива смањење броја обртаја радера турбине, под температуре околног ваздуха доводи до снижења темп. ваздуха у просторије...

Scanned with CamScanner

(10.) Појам и дефиниција управљачке величине као улазне величине објекта, вектора управљања као улаза објекта. Означавање. Пример.

Улазна величина објекта која се формира на основу његовог жељеног динамичког понашања X_{iz}, да би својим дејством на тај објекат обезбедила његово жељено динамичко понашање у номиналним радним условима, односно његово жељено динамичко понашање у стварним радним условима, је његова управљачка величина, у ознаци U, а њих је више U_1, U_2, U_R, могу да се представе као R-дим. вектор управљања $U, U \in R^R$

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_R \end{bmatrix} = \left[U_1, U_2, \dots, U_R\right]^T}$$

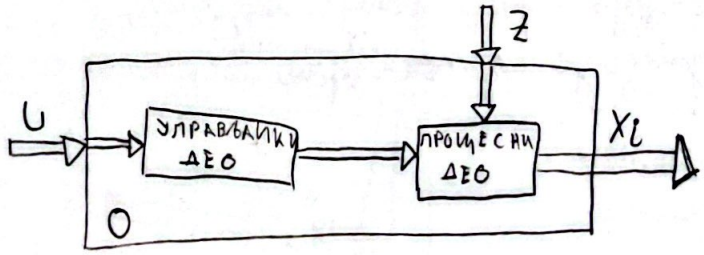
У случају авиона или броја управљачких јединица је највећој (уосталом конкретном) кормила. Друга Ј.Ј. је бројна сила потисна матора. Помоћу њих координатних кормила остварује се одговарајући курс лета авиона, а помоћу бројне силе - брзина лета.

Ако на објекат делује вектор управљања онда се он назива управљани објекат. Улазне величине X_{i1}, X_{i2}, X_{iN} управљаног објекта називају се управљачке величине

У примеру авиона то је висина лета, а у случају камиона то је угао предњег точка.

(11.) Процесни и управљачки део објекта. Дијаграм. Пример.

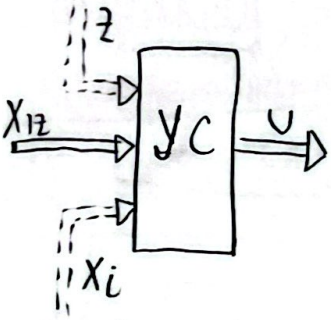
Део објекта у коме се остварује његово динамичко понашање за које је тај објекат намењен је његов радни или процесни део, а део који прима дејство управљања и преноси га на радни део је његов управљачки део или управљачки орган.



Код авиона то је кормило, а код пумпе је улазни вентил

12. Управљачки систем. Структурни дијаграм

Систем чија је излазна величина управљање за дати објекат је управљачки систем за дати објекат, и означава се са УС.

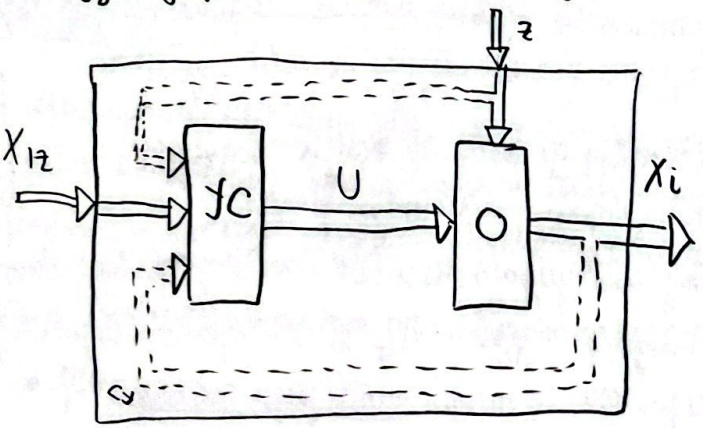


Пошто УС представља систем, он има следеће величине које носе неопходне информације. На основу дефинише управљања и мијења да оно представља излазну величину објекта, сада је задато динамичко понашања објекта, означено вектором X_{1z}, увек један од улаза УС.

Управљање може да се формира и на основу додатних информација, као што су стварно динамичко понашање објекта, односно излаз објекта X_i и/или мјерене поремећајне величине садржане у вектору поремећаја z.

13. Систем управљања. Општи структурни дијаграм. Неаутоматски, полуаутоматски и аутоматски систем управљања.

Систем који се састоји из објекта и управљачког система за тај објекат, а које обезбјеђује управљање је систем управљања, и означава се са СУ.



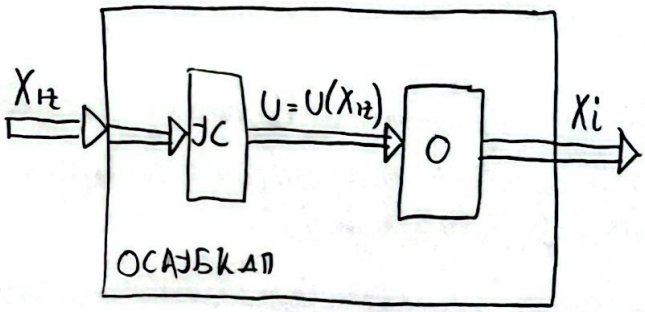
Систем управљања објекта чији је управљачки систем

- само човјек је систем неаутоматског управљања, а само управљање је неаутоматско
- састављен од човјека и уређаја је систем полуаутоматског управљања, а само управљање је полуаутоматско
- само уређај, или скуп уређаја, је систем аутоматског управљања, а само управљање је аутоматско управљање

Scanned with CamScanner

(14.) Отворени систем аутоматског управљања без директне компензације поремећаја. Образложење концепта, основне карактеристике. Пример.

Ако за формирање правилног управљања објекта управљачки систем користи само информацију о задатој, жељеној излазу објекта X_{iz}, $\boxed{U=U(X_i)}$ такав систем се назива <u>отворени систем аутоматског управљања без компензације дејства поремећаја</u> (ОСАУ БКДП).



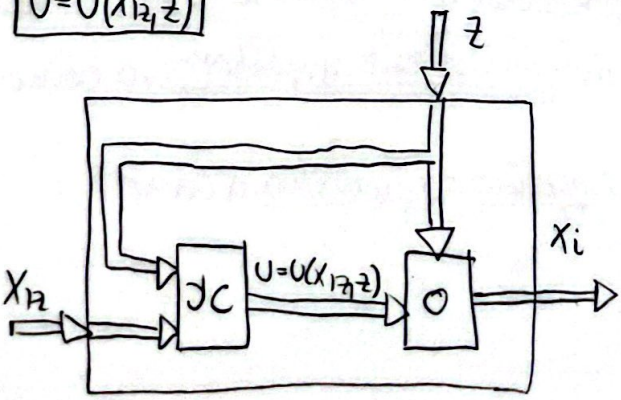
Ови системи обезбеђују задовољавајуће понашање објекта када на систем не дејствују поремећаји, јер управљачки систем не открива такво управљачко дејство које треба да их компензује.

За би се обезбедио задовољавајући рад објекта, управљање мора да се открива на основу информација и о задатом понашању објекта и о тим поремећајима, при чему се постиже директна или непосредна компензација њихових дејстава.

(15.) Отворени систем аутоматског управљања са директном компензацијом поремећаја. Образложење концепта, основе карактеристике. Пример.

Ако за формирање правилног управљања објекта управљачки систем користи само информације о задатој, жељеном излазу објекта X_{iz} и о мереном поремећају z који делује на њега, такав систем управљања се назива <u>отворени систем аутоматског управљања са директном компензацијом дејства�</u> (ОСАУ СДКДП)

$\boxed{U=U(X_{iz},z)}$

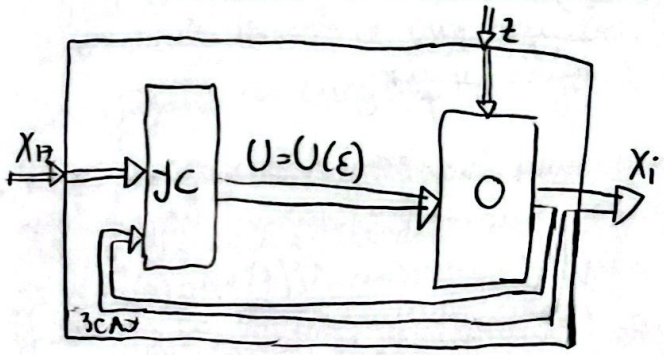


Ако не могу сви поремећаји да се мере, или не могу да се предвиде, онда отворени САУ не могу да остваре циљ управљања.

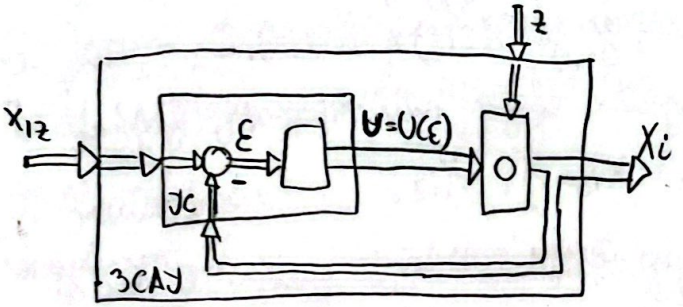
Scanned with CamScanner

(16.) Затворени систем аутоматског управљања. Образложити компоненте, основне карактеристике. Пример

Ако за формирање правилног управљања објекта управљачки систем користи само информацију о разлици између његовог задатог, жељеног стања X_{iz} и његовог стварног стања X_i, тј. о грешци ε излаза, онда је систем АУ <u>затворен САУ</u>. $\boxed{U = U(X_{iz} - X_i) = U(\varepsilon)}$ $\boxed{\varepsilon = X_{iz} - X_i}$



З САУ се одликује постојањем повратне спреге која је негативна, да би систем утврдио грешку ε, између задатог и стварног стања.



Употребљаван је приказан круг, а он утврђује грешку ε која је грешка излаза објекта.

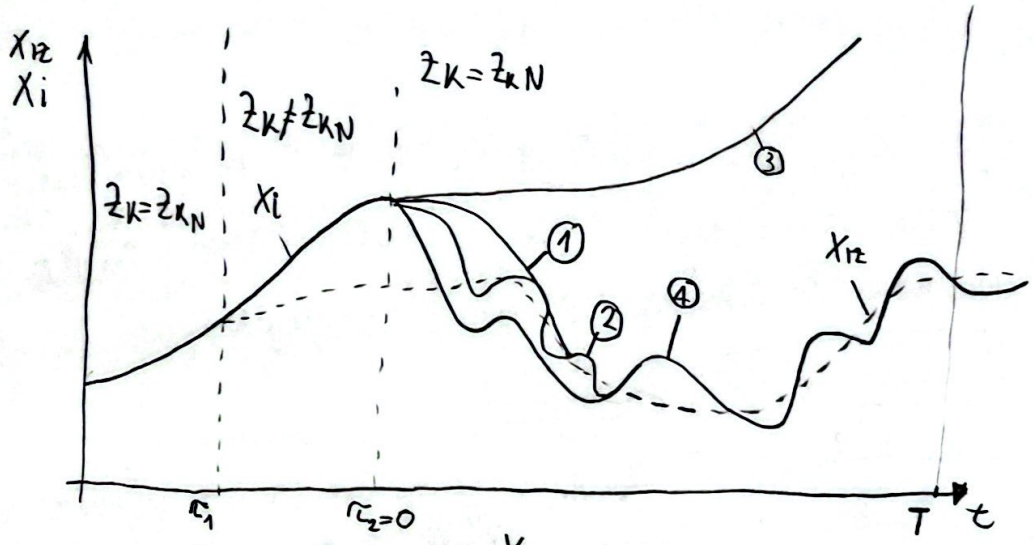
У затвореном систему упр. се остварује индуктивна или бесрамна компензација дејства поремећаја. Она се постиже стварањем управљања на основу грешке ε, која представља последицу дејства поремећаја Z, или промене задате вредности X_{iz}.

Ако је $X_{iz}(t)$ константно и унапријед дефинисано, онда се користе и следећи називи:

- регулисање - управљање
- регулатор - JC
- систем аутоматског регулисања (САР) - САУ
- регулисана величина - управљана величина
- регулишућа величина - управљачка величина

Scanned with CamScanner

17. Основни прорачун динамичког понашања ЗСАУ.



Задато динамичко понашање X_{iz} је наглашено испрекидана линија. До τ_1 све променљиве величине су идентичне једнаке вредностима номиналних вредности $z_K = z_{KN}$, а излазна величина је једнака задатој вредности $X_i(t) = X_{iz}(t)$. Од τ_1 до τ_2 једна или више променљивих величина се мењају од номиналних вредности $z_K \neq z_{KN}$, што за последицу има да је $X_i(t) \neq X_{iz}(t)$. Од τ_2 па надаље, све променљиве величине су опет једнаке сводим номиналним вредностима $z_K = z_{KN}$, али постоји грешка између X_i и X_{iz} → $X_{io} = X_i - X_{iz}$.

Тренутак τ_2 може се посматрати почетним тренутком, тако да је X_{io} одступање излазне величине.

1. Ако је промена излазне величине тада асимптотски тежи ка задатој излазу (1-апериодично; 2-пригушено осцилаторно) за сво које X_{io}, тада се каже да је задато дин. обл. <u>асимптотски стабилно у целом.</u>
2. Ако је промена изл. вел. тада дивергира од X_{iz} (3), тада је дин. понашање <u>нестабилно</u>
3. Ако је промена изл. вел. тада осцилује приближно константном амплитудом (4), тада је жељено дин. понашање <u>стабилно али није прихватљиво.</u>

Scanned with CamScanner

* Особине система

I отворени

1. а) код САУБКАП вектор управљања је $U = U(X_{1z})$

б) код САУСАКАП: $U = U(X_{1z}, z)$

2. Управљачки систем или објекат су редно спојени, па се пренос сигнала одвија у отвореној спрези, систему или кају дејства. Спер преноса сигнала кроз систем назива се спер дејства. Спер дејства је одвојен пренос сигнала са управљачког система на објекат. Повратно дејство не постоји.
3. Информација о задатом понашању објекта је неопходна.
4. Ако су сви делови стабилни, онда је и цео систем. Ово је последица редне спреге.
5. У систему са концентрисаним параметрима до $X_i(t) = X_{1z}(t)$.
6. Једино ф-оних са мерним поремећајима, непрени су мана ОСАУ.
7. У случају дејства непреног пор. неопходно је да се уведе мерач.

II Затворени

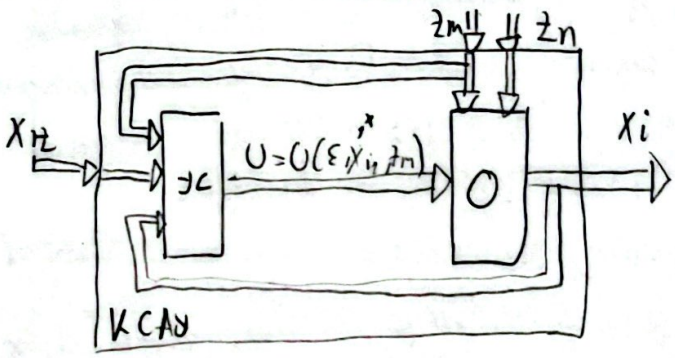
1. ЗСАУ се одликује затвореним каналом дејства са негативним повратним спегом
2. Потребна и довољна информација за рад је информација о грешци управљане величине и њеним изводима.
3. У ЗСАУ се остварује једино индуктивна концентрисана дејства поремећаја. Директна није могућа јер се не може предвидети поремећај
4. УС може да одређује задовољавајући рад објекта, без обзира колико поремећај, до одређене интензитета, делује на тај објекат. Поремећај је научне случајне природе и не може увек да се предвиди
5. Због повратне спреге, стабилност објекта и УС не гарантује стабилност целог система. То представља основни проблем ЗСАУ.

Scanned with CamScanner

(18) Kombinovani sistem AU. Odgovarajuće karakteristike, osobine, primjer.

Ako za formiranje upravljačkog upravljanja objekta uprav. sistem koristi informacije i o željenom, zadanom ponašanju objekta X_{iz}, i o nekoliko stvarnih ponašanja X_i, i o mjerenim poremećajima z_m, onda je to kombinovani CAU.

$$\boxed{U = U(X_{iz} - X_i,\ X_{iz}, z_m) = U(\varepsilon, X_{iz}, z_m)}$$



Ovi sistemi ostvarivanje i direktnu i indirektnu kompenzaciju dejstva ulaznih poremećaja. Vektor poremećaja je: $z = \begin{bmatrix} z_m \\ z_n \end{bmatrix}$.

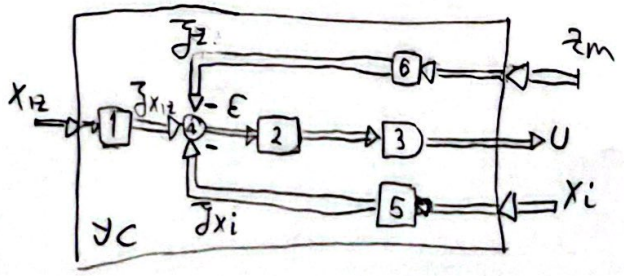
* Osobine

1. Za formiranje upravljačkog upravljanja potrebne su izvjesne informacije o željenom dim. ponašanju objekta, o trenutnom i o poremećaju mjerenje stvarno da se direktno kompenzuje djelovanje upravljanja na taj objekt.
2. U KCAU se ostvaruje direktna kom. mjerenih poremećaja z_m i indirektna kom. i mjerenih i nemjerenih poremećaja.
3. Ako djeluju samo mjereni poremećaji moguće je $X_i(t) = X_{iz}(t)$, a ako djeluju i nemjereni to nije moguće
4. Zbog povratne veze, statičnost UC i O ne garantuje statičnost cijelog sistema.
5. KCAU ima dosta kvalitetnog OCAU i ZCAU, ali je to veći mjerni i složeniji.

*Primjer: Na upravljanje rezervoar djeluju poremećaji promjenljivog pritiska. Zamjenjuje poremećaj je uzeti pritisak i nekoliko mjerno i kompenzuju direktnog dejstva indirektno uz neistinitu povratnu vezu.

(19.) Funkcije i struktura UC.

Deo UC koji u mjernom informacija dovodi neku f-ju se naziva <u>opći UC.</u>



* Опште ф-је

1) УС треба да прими информацију о задатом динамичком понашању објекта (X_{1z}), да је забележи у виду сигнала $\xi_{X_{1z}}$ и пренесе до уређаја 4. Орган који извршава ову ф-ју је задатак (1). Ако је $\xi_{X_{1z}} = \xi_{X_{1z}}(t)$ онда се зове праћење.

2) УС треба да оствари закон, алгоритам управљања. То остварује корекциони орган 2.

3) УС треба да створи управљање довољног интензитета у сваком тренутку. Ову ф-ју остварује извршни орган 3.

4) Да би могли да се уређају сигнали неопходно је да постоји уређај 4.

* Посебне ф-је

1) У ОСАУСДКДП и КСАУ упр. систем треба да мери неке одређене z и користи сигнал ξ_z о томе. То остварује мерни орган уређаја 6.

2) У ЗСАУ и КСАУ упр. систем треба да измери остварену вредност излаза X_i и користи сигнал ξ_{X_i} о њему. То остварује мерни орган излаза 5.

Scanned with CamScanner

ГРУПА Б

ЈИ- улаз-излаз

① Стационарни ЈИ систем, дефинисање, графичко интерпретирање.

✱ **D]** Подскуп реда који потпуно динамички описује систем, тј. које омогућава да се одреде вредности излаза система и свих извода на интервалу $[t_0, +\infty]$ за сваки почетни $t_0 \in R$, а при познатим почетним вредностима у t_0, је <u>D] почетна</u> или <u>ј-на почетна система</u>.

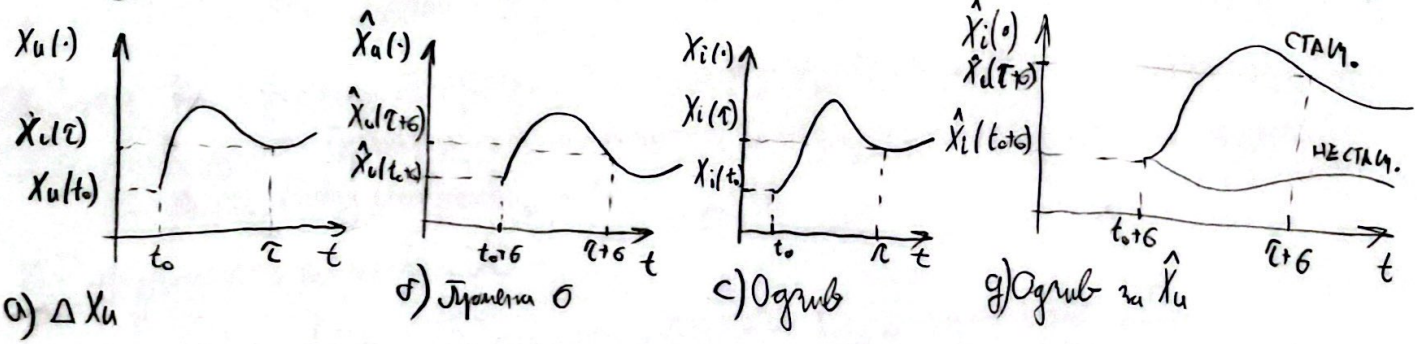
Стационарност система се односи на експлицитну зависност дин. понашања од времена. Нека на систем у t_0 крене да делује вектор улаза $X_u(t)$ приказан на а). Одзив $X_i(t)$ зависи од стања вектора улаза $X_u(t)$ и почетног тр. t_0 и почетног вектора излаза и његових извода до $\nu-1$ реда, $X_{i0}(t) = X_{i_0}, \dot{X}_{i0}(t_0) = \dot{X}_{i_0}, \dots, X_{i_0}^{(\nu-1)}(t_0) = X_{i_0}^{(\nu-1)}$.
Скуп почетних услова се може исказати на следећи начин:

$$X_{i_0}^{\nu-1} = \left[X_{i_0}^T \ \dot{X}_{i_0}^T \ \dots \ X_{i_0}^{(\nu-1)T} \right]^T \in R^{\nu N}$$

Према томе $X_u(t)$ и $X_{i_0}^{\nu-1}$ генеришу одзив $X_i(t)$ на с).
$\hat{X}_u(t)$ представља померену вектора улаза која је за σ померена дуж временске осе и важи:

$$\hat{X}_u(t) = X_u(t-\sigma), \quad \hat{X}_u(t+\sigma) = X_u(t) \Rightarrow \hat{X}_i^{\nu-1}(t_0+\sigma) = X_i^{\nu-1}(t_0) = X_{i_0}^{\nu-1}$$

Ако се за сваку улазну величину добија одзив померен за σ, тада је тај систем <u>стационарни дин. систем.</u> У том случају важи: $\hat{X}_i(t) = X_i(t-\sigma)$, $\hat{X}_i(t+\sigma) = X_i(t)$ на д)



а) ΔX_u б) Померена σ с) Одзив д) Одзив за $\hat{X}_u$

ЈИ систем је <u>стационарни</u> (временски непромењив), АКО избор почетног тренутка не утиче на његов одзив:

$$X_i(t+\sigma, t_0+\sigma; X_{t_0}^{\nu-1}; \hat{X}_{u[t_0+\sigma; t+\sigma]}) = X_i(t; t_0; X_{t_0}^{\nu-1}; X_{u[t_0; t]})$$

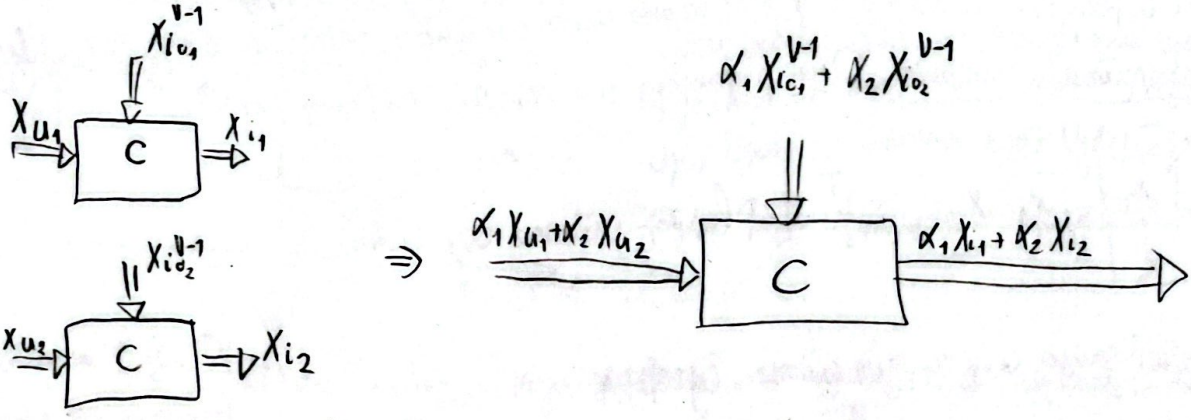
Scanned with CamScanner

② Линеарни ДН системи, дефиниција, графичка интерпретација

Ф-ја $y = f(x)$ је линеарна АКО важи закон суперпозиције: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

ДН систем је линеаран АКО су његова решења линеарна и по почетним условима и по вектору улаза:

$$x_i(t, t_0, \alpha_1 x_{i_{0_1}}^{v-1} + \alpha_2 x_{i_{0_2}}^{v-1}, \alpha_1 x_{u_1} + \alpha_2 x_{u_2}) = \alpha_1 x_i(t, t_0, x_{i_{0_1}}^{v-1}, x_{u_1}) + \alpha_2 x_i(t, t_0, x_{i_{0_2}}^{v-1}, x_{u_2})$$



③ Линеарни, стационарни ДН систем, ј-на почетна, ред, димензија система

За да ДН систем био линеарни и стационарни систем потребно је и довољно да је његова ДЈ почетна система линеарна са свим конст. коеф.:

$$\sum_{k=0}^{v} A_k x_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\mu} B_k x_u^{(k)}(t), \quad \det A_v \neq 0, \quad v \geq 1, \quad 0 \leq \mu \leq v$$

$$x_i^{(k)}(t) = \frac{d^k x_i(t)}{dt^k}, \quad x_u^{(k)}(t) = \frac{d^k x_u(t)}{dt^k}, \quad x_i \in R^N, \quad x_u \in R^M$$

$$A_k \in R^{N \times N}, \quad B_k \in R^{N \times M}, \quad k = 0, 1, \dots, v$$

$$\mu < v \Rightarrow B_i = O_{N,M}, \quad i = \mu+1, \mu+2, \dots, v.$$

↳ НУЛА МАТРИЦА N×M

<u>Ред система</u> је број v који представља највећи извод вектора излаза у ј-ни

<u>Димензија система</u> означена са dim y, једнака је N, тј. једнака је димензији вектора излаза у ј-ни, $\dim y = N$.

Scanned with CamScanner

4. Дефиниција физичког стања дин. система.

<u>Стање дин. система</u> у тренутку $\tau \in T$ је она његова дин. динамичка ситуација у том тренутку τ која, уз познавање промене $X_{u[\tau,+\infty)}$ вектора улаза X_u на интервалу $[\tau,+\infty)$, коначно одређује промену излаза $X_i(t)$ на том интервалу, као и саму ту дин. дин. ситуацију у сваком тренутку t после тренутка τ, $t \in [\tau,+\infty)$.

Најмањи број n линеарно независних величина $X_k \in R$, $k=1...n$ чије вредности $X_k(t)$, $k=1...n$ у сваком тренутку потпуно и једнозначно стање система у тренутку $t \in T$ представљају <u>величине стања система</u>. Оне формирају n-димензионални вектор $X \in R^n$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ ... \ x_n]^T$$ - вектор стања система

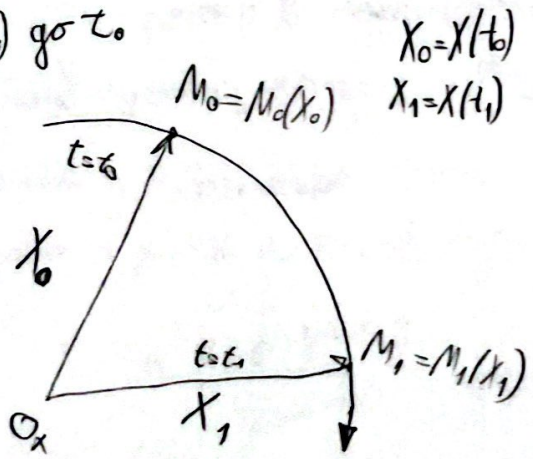
6. Траекторија стања, лик стања, график

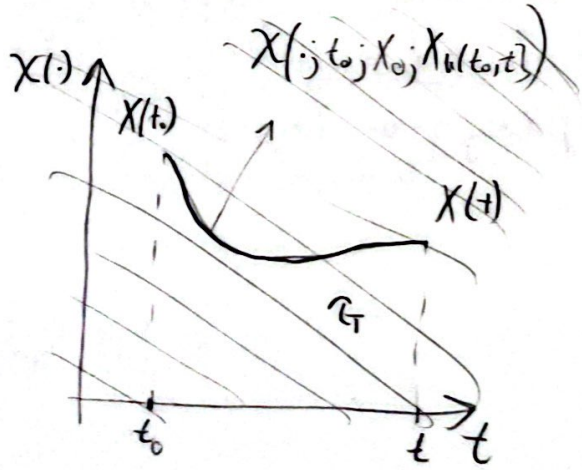
n-димензионални реални векторски простор R^n чија је свака тачка у јединственој једнозначној вези са стањем система је <u>простор стања</u> тог система.

Тачка M у простору стања чији вектор положаја представља вектор стања система је <u>радна</u> или <u>репрезентативна</u> тачка.

Геометријско место свих положаја радне тачке M у простору стања кроз које она прође у току времена је <u>траекторија стања</u> (Σ) тог система кроз дато почетно стање система. Скуп свих траекторија стања система је <u>лик</u> или <u>портрет стања</u> система.

Траекторија стања представља скуп свих тачака кроз који прилази вектор стања од $X(t_0)$ до t_0





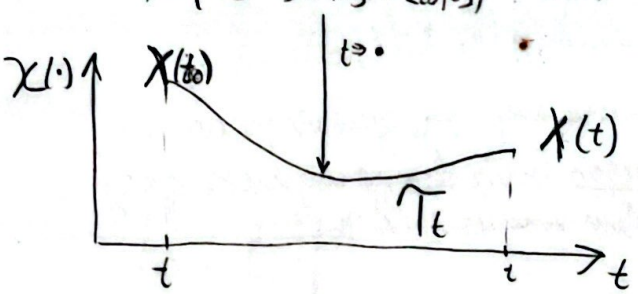
Scanned with CamScanner

7. Дефинисање кретања система и ф-је одзива.

Векторска ф-ја $X(\cdot; t_0, X_0; X_{u[t_0,t]})$ која дефинише закон по коме систем из стања X_0 у t_0, а под дејством улаза $X_u(t)$ на интервалу $[t_0, t]$, уознаци $X_{u[t_0,t]}$, прелази у стање $X(t)$ у t, се назива <u>ф-ја прелаза стања</u> или <u>кретање</u> или <u>решења</u> система.

Векторска једначина ф-је прелаза стања $X(\cdot)$ у t је вектор стања $X(t)$ у тренутку t:

$$X(t; t_0, X_0; X_{u[t_0,t]}) = X(t)$$



Геом. место свих тачака у инт. простору кроз које пролази радна тачка $M[t, X(t)]$ при промени времена кроз цело временски скуп T је <u>интегрална трајекторија</u> у ознаци Σ_t

Векторска ф-ја $X_i(\cdot; t_0, X_0; X_{u[t_0,t]})$ која једнозначно одређује промену излаза система настану из почетног стања X_0 у t_0, а под дејством промене $X_{u[t_0,t]}$ улаза на интервалу $[t_0, t]$ назива се <u>ф-ја одзива</u> или краће <u>одзив</u> система. Векторска једначина ф-је одзива $X_i(\cdot)$ у t представља вектор излаза у тај тренутак: $X_i(t; t_0, X_0; X_{u[t_0,t]}) = X_i(t)$

8. Стационарни ЈСИ систем, карактеристике и дефиниција.

Уколико се за временски померену промену вектора улаза за интервал σ добијају кретање и одзив који су такође померени за једнакост σ у односу на кретање и одзив при почетној промени вектора улаза, тада тај систем представља стационарни дин. ЈСИ систем.

а) ЈСИ систем $\left.\begin{array}{l}\dot{X}(t) = f(t, X, X_u)\\ X_i(t) = g(t, X, X_u)\end{array}\right\}$ * је <u>стационарни</u> АКО:

i) избор почетног тренутка t_0 не утиче на облик кретања

$$x(t+\sigma; t_0+\sigma, X_0; \hat{X}_{u[t_0+\sigma, t+\sigma]}) \equiv X(t; t_0, X_0; X_{u[t_0,t]})$$

ii) избор t_0 не утиче на ф-ју одзива:

$$x_i(t+\sigma; t_0+\sigma, X_0, \hat{X}_{u[t_0+\sigma, t+\sigma]}) \equiv X_i(t; t_0, X_0, X_{u[t_0,t]})$$

Scanned with CamScanner

δ) Динамички систем је <u>нестационарон</u> АККО је најмање један од 2 услова није испуњен.

(9.) Линеарни ДСИ систем, карактеристике и дефиниција.

ДСИ систем * је линеарон АККО за њега важи закон суперпозиције, тј. АККО:

1. је његово кретање линеарно и по почетним стању и по улазу:

$$x(t;t_0,\alpha_1 x_{01}+\alpha_2 x_{02};\alpha_1 x_{u1}+\alpha_2 x_{u2}) \equiv \alpha_1 x(t;t_0,x_{01};x_{u1})+\alpha_2 x(t;t_0,x_{02};x_{u2})$$

2. је његова ф-ја одзива линеарна и по почетним стању и по улазу:

$$y_i(t;t_0,\alpha_1 x_{01}+\alpha_2 x_{02};\alpha_1 x_{u1}+\alpha_2 x_{u2}) \equiv \alpha_1 y_i(t;t_0,x_{01};x_{u1})+\alpha_2 y_i(t;t_0,x_{02};x_{u2})$$

(10.) Линеарни стационарни ДСИ системи, математички модел, ред, димензија система

Да би ДСИ систем * био <u>линеарон</u> и <u>стационарон</u> потребно је и довољно да су његове ј-не стања и излаза линеарне ф-је са свим константним коеф.:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)+BX_u(t) \quad (1)$$

$$X_i(t) = CX(t)+DX_u(t), \quad (2)$$

$A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times M}$, $C\in R^{N\times n}$, $C\neq O_{N,n}$, $D\in R^{N\times M}$, $n\geq N$

Матрице A, B, C, D су константне. Ј-на (1) је у Кошијевом или нормалном облику. Он садржи само први извод вектора стања $X(t)$ и не постоји извод ни интеграл вектора улаза $X_u(t)$. Матрица A је матрица стања и она дефинише дин. особине система. Матрица B је матрица улаза и њене је дефинисан утицај улаза на промену стања система. Матрица C је матрица излаза и дефинише међузависност излаза система и стања. Матрица D се назива матрица директног преноса улаза на излаз. Она изражава директан утицај улаза на излаз.

<u>Ред система</u> (1)/(2) једнак је броју извода вектора стања у (1), тј. једнак је 1.

<u>Димензија система</u> (1),(2), означена са $\dim_{US}$, једнака је n, тј. једнака је димензији вектора стања, $\dim_{ДСИ}=n$.

Scanned with CamScanner

11. Општи алгоритам за избор величина стања УИ система.

Математичком трансформацијом сложеног система:

$$\sum_{k=0}^{\nu} A_k X_t^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\mu} B_k X_u^{(k)}(t), \det A_\nu \neq 0 \qquad (1)$$

$$\vdots$$

потребно је добити укупно $n = \nu N$ ДЈ првог реда, где на десној страни тих ј-на не смеју да фигурирају изводи улазних величина. Алгоритми који обезбеђују ову трансформацију називају се <u>алгоритми за уводење величина стања</u>.

Општи:

$$A_\nu = I_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in R^{N \times N}$$

За примену алгоритма је потребно да матрица A_ν уз највиши извод вектора излаза буде јединична матрица. Ако то није случај, неопходно је помножити с лева матрицом A_ν^{-1}. Надаље се узима $A_\nu = I$.

С обзиром да је у (1) $\mu < \nu \rightarrow \sum_{k=0}^{\nu} A_k X_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\nu} B_k X_u^{(k)}(t)$, $A_\nu = I$, $\nu \geq 1$

Основни проблем у дефиницији величина стања у овом случају лежи у изводима вектора улаза. Вел. стања морају да буду тако дефинисане да елиминишу изводе вектора улаза у ј-ни стања.

Један од начина да се то уради је да се дефинише следећих ν вектора:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \dot{X}_i - B_\nu X_u \\ X_2 &= \dot{X}_1 + A_{\nu-1} X_i - B_{\nu-1} X_u \\ X_3 &= \dot{X}_2 + A_{\nu-2} X_i - B_{\nu-2} X_u \\ &\vdots \\ X_{\nu-1} &= \dot{X}_{\nu-2} + A_2 X_i - B_2 X_u \\ X_\nu &= \dot{X}_{\nu-1} + A_1 X_i - B_1 X_u \end{aligned}\right\} + (1) \rightarrow \begin{aligned} \dot{X}_1 &= -A_{\nu-1} X_1 + X_2 + (B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu) X_u \\ \dot{X}_2 &= -A_{\nu-2} X_1 + X_3 + (B_{\nu-2} - A_{\nu-2} B_\nu) X_u \\ &\vdots \\ \dot{X}_{\nu-1} &= -A_1 X_1 + X_\nu + (B_1 - A_1 B_\nu) X_u \\ \dot{X}_\nu &= -A_0 X_1 + (B_0 - A_0 B_\nu) X_u \end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

Ако дефинираме вектор стойност на следния начин:

$$X(t)=\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_\nu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}(t) \\ X_{12}(t) \\ \vdots \\ X_{1N}(t) \\ X_{21}(t) \\ X_{22}(t) \\ \vdots \\ X_{2N}(t) \\ \vdots \\ X_{\nu 1}(t) \\ X_{\nu 2}(t) \\ \vdots \\ X_{\nu N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, \quad n=\nu N$$

следи:

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BX_u(t)$$

$$A=\begin{bmatrix} -A_{\nu-1} & I_N & O_N & \dots & O_N \\ -A_{\nu-2} & O_N & I_N & \dots & O_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_1 & O_N & O_N & \dots & I_N \\ -A_0 & O_N & O_N & \dots & O_N \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{\nu-1}-A_{\nu-1}B_\nu \\ B_{\nu-2}-A_{\nu-2}B_\nu \\ \vdots \\ B_1-A_1B_\nu \\ B_0-A_0B_\nu \end{bmatrix}$$

$$X_i(t)=X_1(t)+B_\nu X_u(t) \Rightarrow X_i(t)=\begin{bmatrix} I_N & O_{N,N} & \dots & O_{N,N} \end{bmatrix} X(t)+B_\nu X_u(t)$$

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)+BX_u(t) \qquad A\in R^{n\times n}, \quad C\in R^{N\times n}$$

$$X_i(t)=CX(t)+DX_u(t) \qquad B\in R^{n\times m}, \quad D\in R^{N\times m}, \quad n=\nu N$$

$$A=\begin{bmatrix} -A_{\nu-1} & I_N & O_N & \dots & O_N \\ -A_{\nu-2} & O_N & I_N & \dots & O_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_1 & O_N & O_N & \dots & I_N \\ -A_0 & O_N & O_N & \dots & O_N \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{\nu-1}-A_{\nu-1}B_\nu \\ B_{\nu-2}-A_{\nu-2}B_\nu \\ \vdots \\ B_1-A_1B_\nu \\ B_0-A_0B_\nu \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} I_N & O_{N,N} & \dots & O_{N,N} \end{bmatrix}, \quad D=B_\nu$$

Scanned with CamScanner

У посебном случају једноструког преносног система, добијамо:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k x_u^{(k)}(t),\ a_n = 1,\ (n = \nu)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bx_u(t),\ A \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times 1}$$

$$x_i(t) = CX(t) + Dx_u(t),\ C \in R^{1\times n},\ D \in R^{1\times 1},\ n = \nu$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix},\ C = [1\ 0 \dots 0],\ D = b_n$$

(12.) Избор величина стања УН система: фазне величине стања

$$\sum_{k=0}^{\nu} A_k x_i^{(k)}(t) = B_0 x_u(t),\ A_\nu = I;\ \nu \geq 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \dot{x}_i & \dot{x}_2 &= x_3 \\ x_3 &= \ddot{x}_i & \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots & &\vdots \\ x_{\nu-1} &= x_i^{(\nu-2)} & \dot{x}_{\nu-1} &= x_\nu \\ x_\nu &= x_i^{(\nu-1)} & \dot{x}_\nu &= -A_0x_1 - A_1x_2 \dots - A_{\nu-1}x_\nu + B_0x_u \end{aligned} \Rightarrow \dot{X} = AX + Bx_u \quad \begin{cases} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0_{N,M} \\ 0_{N,M} \\ \vdots \\ 0_{N,M} \\ B_0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 0_N & I_N & 0_N & \dots & 0_N \\ 0_N & 0_N & I_N & \dots & 0_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_N & 0_N & 0_N & 0_N & I_N \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \dots & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ако за величине стања система уведе једна величина и њени изводи онда се оне називају <u>фазне величине</u>. Матрица A зове се матрица пратиља, а вектор-врста у којој је матрица A у облику матрице пратиље је у фазном нормалном облику.

- постоје физички динамички системи који се директно могу описати у УСН, при чему су све величине стања у моделу физичке величине тог система
- постоје дин. системи за које се из ниског УН модела може добити УСН модел, задржавајући физичкост свих величина
- из УН модела дин. система може се формално математички добити ниског УСН модела, при чему се губи физичкост величина стања

Scanned with CamScanner

(13.) Принудни и слободни режим рада: дефинисање и облик ЈН и ЈСН система у режимима

<u>Режим система</u> представља скуп почетних и стационарних услова под којим систем ради, и при чему његовог понашања.

а) Систем је у <u>принудном режиму</u> АКО постоји тренутак t који припада интервалу $(0,+\infty)$ у коме на систем делује вектор улаза различитог од нуле:

$$\exists t \in [0,+\infty) \Rightarrow X_u(t) \neq O_M$$

ЈН: $\sum_{k=0}^{N} A_k X_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k X_u^{(k)}(t)$

ЈСН: $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BX_u(t)$, $X_i(t) = CX(t) + DX_u(t)$

б) Систем је у <u>слободном режиму</u> АКО је његов вектор улаза стално једнак нули на интервалу $[0,+\infty)$:

$$X_u(t) = O_M, \ \forall t \in [0,\infty)$$

ЈН: $\sum_{k=0}^{N} A_k X_i^{(k)}(t) = 0$

ЈСН: $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$, $X_i(t) = CX(t)$

(14.) Номинални радни режим ЈН система: деф., услови. Лапласова трансф., график, ј-на

(15.) • Систем се налази у <u>номиналном (задатом)</u> радном режиму АКО је његов излазни излаз једнак његовом номиналном излазу за свако $t \in [0,+\infty)$:

$$X_i(t) = X_{iN}(t), \ \forall t \in [0,+\infty)$$

• За да систем био у номиналном радном режиму, неопходно да почетни излазни вектор излаза буде једнак почетном номиналном вектору излаза:

$$X_i(t) = X_{iN}(t), \forall t \in [0,+\infty) \Rightarrow X_{i0} = X_{iN0}.$$

• Улаз X_u^* система је <u>номинални у односу на номинални одзив</u> X_{iN}, и означава се са X_{uN}, АКО једнак. $X_u = X_u^*$ одговарајући излазни одзив $X_i = X_i^*$ система задовољава једначину $X_i^*(t) = X_{iN}(t)$ за $\forall t \in [0,+\infty)$

• За да улаз X_u^* био номинални улаз у односу на номинални одзив X_{iN}, $X_u^* = X_{uN}$, потребно је:

$$\sum_{k=0}^{M} B_k X_u^*(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k X_{iN}^{(k)}(t), \ \forall t \in [0,+\infty)$$

Scanned with CamScanner

Векторски пар $[X_u^*, X^*]$ представља <u>номинални пар система</u> у односу на ном. излазе X_{iN}, што се означава са $[X_{uN}, X_N]$, АКО једначине $[X_u, X] = [X_u^*, X^*]$ одговарају том паровима излаза $X_i = X_i^*$ система задовољава у-ласт $X_i^* = X_{iN}$ све време:

$$[X_u^*, X^*] = [X_{uN}, X_N] \Longleftrightarrow X_i^* = X_{iN}, \ \forall t \in [0, +\infty).$$

Временска промена $X_N(t; X_{N0}; X_{uN})$ ном. вектора X_N назива се <u>номинално кретање</u> у односу $X_N(t; X_{N0}; X_{uN})$.

За ди лин. пар $[X_u^*, X^*]$ да номинални задовољен у односу на ном. излазе X_{iN}, потребно је:

$$\frac{dX^*(t)}{dt} = AX^*(t) + BX_u^*(t)$$

$$X_{iN}(t) = CX^*(t) + DX_u^*(t)$$

* Матрица прелаза.

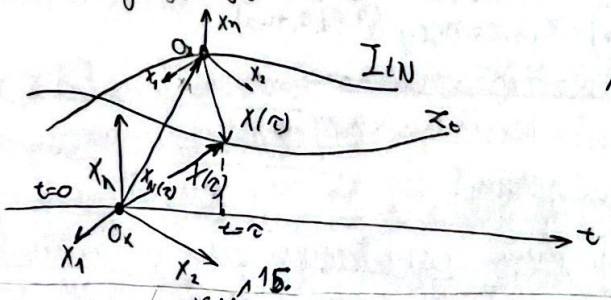
У циљу анализе номиналног и отворене бенчмарка користи се <u>одступање лин. излаза</u> X_i и грешка лин. излаза ε.

$$\left.\begin{aligned} x_i &= X_i - X_{iN} \\ \varepsilon &= X_{iN} - X_i \end{aligned}\right\} \boxed{\varepsilon = -x_i}$$

Матрична трансформација важи и за све друге величине система: $x_u = X_u - X_{uN}$, $x = X - X_N$

Посматрајући ову трансформацију коо. је одређена транслацијом коо. почетка из $X = O_X$ у $X = O_x$.

Динамика посматрано, значи да се номинална интегрална траекторија узима за место коо. почетка тако да $x = O_x$ опстаје дуж све у току времена.



$$X_N(t) + x(\tau) = X(\tau)$$

14.

ЈН:

$$\sum_{k=0}^{V} A_k X_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k X_u^{(k)}(t)$$

$$\sum_{k=0}^{V} A_k X_{iN}^{(k)} = \sum_{k=0}^{M} B_k X_{uN}^{(k)}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{V} A_k x_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k x_u^{(k)}(t).}$$

15.

ЈСИ:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BX_u(t)$$

$$X_i(t) = CX(t) + DX_u(t)$$

$$\frac{dX_N(t)}{dt} = AX_N(t) + BX_{uN}(t)$$

$$X_{iN}(t) = CX_N(t) + DX_{uN}(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bx_u(t) \\ x_i(t) &= Cx(t) + Dx_u(t) \end{aligned}}$$

Scanned with CamScanner

(16.) Шта представља стационарни режим рада? Деф. за ЈН и ЈСН.

Унутрашње аутономно дин. понашање система може бити:

- стационарно - константно, непромењиво током времена
- нестационарно - повремено или променљиво. Ако је понављиво онда је периодично, где је време понављања σ период. Ако није онда је апериодично.

Стационарне режиме карактерише синтуорна тачка, која је стационарна у аутон случају, а равнотежна у секвенцијалном.

* ЈН

ЈН систем је у ~~стационарном радном режиму у односу на X_u~~ Акко је његов одзив константан све време:

$$X_i(t; X_{i0}^{V-1}; X_u) = X_i(0, X_{i0}^{V-1}; X_u) = X_{i0} = const, \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

У осталим случајевима је у нестационарном режиму у односу на X_u.

Стац. радни режим настаје када систем уђе у стационарни вектор система, где су константне вредности вектора излаза и улазне вредности свих излаза.

* ЈСН

ЈСН систем је у стационарном радном режиму у односу на X_u Акко важи:

i) Његов вектор стања је константан све време:

$$X(t) = X(t; X^*; X_u) = X^* = const., \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

ii) Његов одзив је константан све време:

$$X_i(t; X^*; X_u) = X_i(0; X^*; X_u) = X_{i0} = const., \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

Вектор $X^* \in R^n$ се назива стационарно стање и означава се са X_s.

У осталим случајевима систем је нестационарно у односу на X_u.

(17.) Шта је равнотежни радни режим? Деф. за ЈН и ЈСН. Теорема о броју равнотежних стања.

Равнотежни режим може бити статички или динамички. Уколико је X_{iN} константна вредност, тада је статички режим, а равнотежна тачка у одступањима је статичка равнотежна тачка. У супротном су и режим и тачка динамички.

Равн. режим претпоставља понашање система под дејством номинаног улазног вектора X_{uN} и при свим номиналним почетним условима. Ако је систем отпуштен без одступања, тада без одступања у следећем режиму.

Scanned with CamScanner

*ЈИ

- може имати један, јединствени равнотежни вектор, али и не мора

Систем је у равнотежном радном режиму АКО је у слободном режиму и његов одзив је константан све време, то јест:

$$x_i(t; x_{i0}^{V-1}; 0_M) = x_i(0; x_{i0}^{V-1}; 0_M) = x_{i0} = const; \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

Равн. режим одређен је равнотежним вектором која карактерише конс. вредност вектора излаза и низ(е) вредности свих његових улаза.

*ЈСИ

→ -||-

Систем је у равн. радном режиму АКО су његов вектор стања (крајње) и вектор излаза конст. све време у слободном режиму:

$$\left.\begin{aligned} &x(t; x^*; 0_M) = const = x(0, x^*; 0_M) = x^*, \quad \forall t [0, +\infty) \\ &x_i(t, x^*; 0_M) = const = x_i(0, x^*; 0_M) = x_{i0}, \quad \forall t [0, +\infty) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x^* \in R^n, \quad x_r = x^* \\ &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \end{aligned}$$

(T 4.4) Да би вектор $x^* \in R^n$ био равнотежно стање ЈСИ система, потребно је и довољно да је излаз крајења у слободном радном режиму кроз стање x^* једнак нули:

$$\frac{d}{dt} x(t; x^*; 0_M) = Ax(t; x^*; 0_M) = 0_n \rightarrow Ax^* = 0_n$$

(T4.5) а) Да би вектор $x^* \in R^n$ био јединствено стање ЈСИ потребно је и довољно да је матрица $A \in R^{n \times n}$ несингуларна, $\boxed{\det A \neq 0}$

б) Да би ЈСИ систем имао више могућих равнотежних стања потребно је и довољно да је матрица $A \in R^{n \times n}$ сингуларна, $\boxed{\det A = 0}$

Тада систем има бесконачно много могућих равн. стања која чине хиперраван свих равнотежних вектора стања који пролазе кроз коор. почетак $\underline{X = 0_n}$.

Scanned with CamScanner

(18) Које су то типичне, карактеристичне промене улазних величина? Дати математички опис и графички приказ.

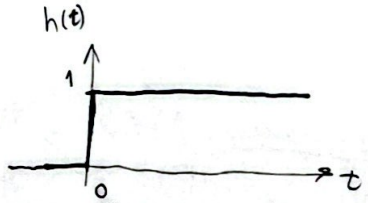
Промена излаза система у току времена, настала или дејством улаза, или дејством почетних услова или истовременим дејством улаза и почетних услова је <u>временски одзив система</u>.

* Јединична одскочна ф-ја

– Јавља се када се прекидам у ел. системима нешто укључи или искључи и сл.

• <u>Јед. одскочна ф-ја</u> ($h(t)$) назива се и <u>Хевисајдова</u> ф-ја

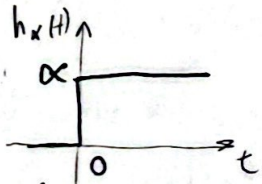
$$h(t)=\begin{cases}=0 & ; \ t<0\\ \in[0,1] & ; \ t=0\\ =1 & ; \ t\in[0,+\infty)\end{cases}$$



Одзив је ~~јед. одскочни одзив~~ или ~~прелазна ф-ја~~ $g(t)$; $x_u(t)=h(t) \Rightarrow x_i(t)=g(t)$

• <u>одскочна ф-ја</u> ($h_\alpha(t)$) за реалан број $\alpha=0$

$$h_\alpha(t)\begin{cases}=0 & ; \ t<0\\ \in[0,\alpha] & ; \ t=0\\ =\alpha & ; \ t\in[0,+\infty]\end{cases}$$

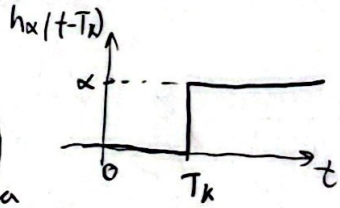


$x_u(t)=h_\alpha(t) \Rightarrow x_i(t)=g_\alpha(t)$

→ одскочни одзив

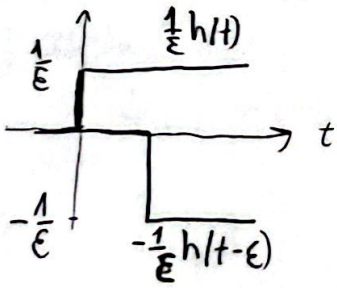
• <u>одскочна ф-ја са кашњењем</u> ($h_\alpha(t-T_k)$)

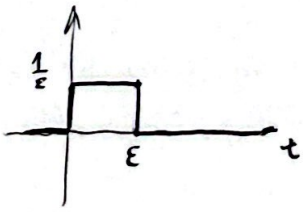
$$h_\alpha(t-T_k)\begin{cases}=0 & ; \ t<T_k\\ \in[0,\alpha] & ; \ t=T_k\\ =\alpha & ; \ t\in[T_k,+\infty]\end{cases}$$

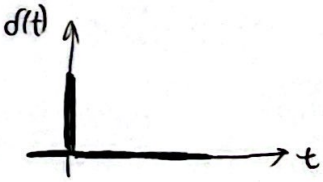


* Јединична импулсна ф-ја

Означава се са $\delta(t)$ и зове се Диракова импулс; $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{h(t)-h(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$







Scanned with CamScanner

Када се ε смањује и тежи нули, добија се правоугаоник са страницама ε и $\frac{1}{\varepsilon}$.
Површина тог облика је $P=\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}=1$, па се тражи она ф-ја која је у нули бесконачног интензитета.
Назива јед. импулсна ф-ја.

Дирекс импулс има особину да је

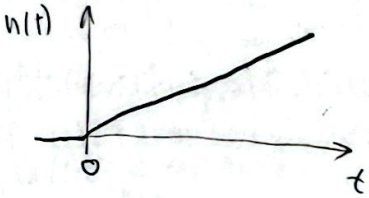
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1;\quad \begin{matrix}\delta(0)=+\infty\\ \delta(t)=0\end{matrix},\quad \forall(t\neq 0)\in(-\infty,+\infty),\quad x_u(t)=\delta(t)\Rightarrow x_i(t)=i(t)$$

↳ јед. импулсни одзив

* Називна ф-ја

- Означава се са $h(t)$ и представља сигнал који се мења константном старом временом.

$$h(t)=\begin{cases}0, & t\in(-\infty,0]\\ \alpha t, & t\in[0,+\infty),\ \alpha\in(-\infty,+\infty)\end{cases}$$

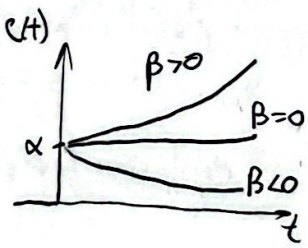


$$\boxed{h(t)=\alpha t h(t)}$$

↳ називни одзив

* Експоненцијална ф-ја

$$e(t)=\begin{cases}=0, & t\in(-\infty,0)\\ \in[0,\alpha], & t=0\\ =\alpha e^{\beta t}, & t\in(0,+\infty)\end{cases}$$



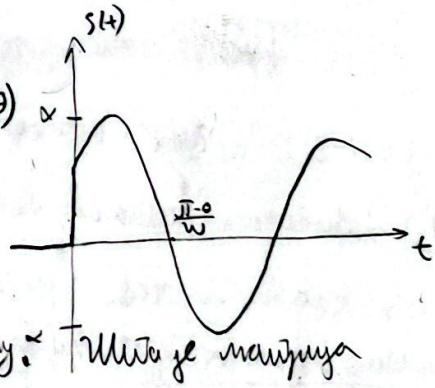
$$\boxed{e(t)=\alpha e^{\beta t}h(t)}$$

↳ експоненцијални одзив

* Синусна ф-ја

$$s(t)=\begin{cases}=0, & t\in(-\infty,0)\\ \in(0,\alpha\sin\theta], & t=0\\ =\alpha\sin(\omega t+\theta), & t\in(0,\infty)\end{cases}$$

$$s(t)=\alpha h(t)\sin(\omega t+\theta)$$



(19) Кретање и одзив ЛСН система у слободном радном режиму. Шта је матрица прелаза стања?

У слободном радном режиму важи $x_u(t)=0_n$, па ЛСН гласи:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)},\quad \boxed{x_i(t)=Cx(t)}$$

За $n=1$, $x=x$, $A=a$ → $\dot{x}(t)=ax(t)$ → $\boxed{x(t,x_0;0)=e^{at}x_0}$

Scanned with CamScanner

За n-димензионални: $e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{(at)^k}{k!}$, за $n \times n$ важи:

$e^{At} = I_n + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{k!}(At)^k$, где је I_n јед. матрица $n \times n$

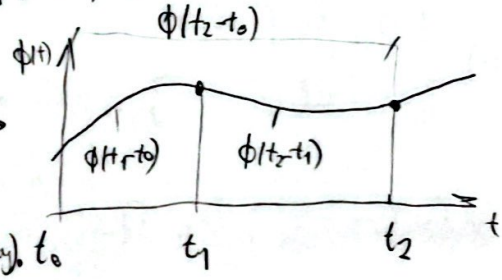
$$\boxed{X(t) = X(t, X_0; 0) = \phi(t) X_0}$$

Решење је у општем случају $X(t; X_0, 0) = e^{At} X_0$.

Матрица e^{At} је <u>матрица прелаза</u> и означава се са $\phi(t)$, $\boxed{\phi(t) = e^{At}}$

Има следеће особине:

1. $\phi(0) = I$
2. Несингуларна је у сваком тренутку: $\det \phi(t) \neq 0, \forall t \in R$
3. Има инверзну матрицу у сваком тренутку: $\forall t \in R \Rightarrow \exists \phi^{-1}(t), \phi^{-1}(t) = \phi(-t)$
4. За свако t_0, t_1 и t_2, важи $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$
5. Матрице A и ϕ су комутативне $A\phi(t) = \phi(t)A$
6. $\frac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t) = \phi(t)A$



(20.) Кретање и одзив ЛСН система у принудном режиму (само код). Које су компоненте?

$$\frac{dX(t)}{dt} - AX(t) = 0 \quad - \quad X(t; X_0; X_u) = e^{At}X_0 = \boxed{\phi(t)X_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)BX_u(\tau)d\tau}$$

$\phi(t)X_0$ - кретање система услед почетних услова (при нултом улазу)

$\int_0^t \phi(t-\tau)BX_u(\tau)d\tau$ - кретање услед улаза

(21.) Дефиниција Лапласове трансформације? Инверзна Лапласова трансф.

Лапласова трансф. временске ф-је $X(t)$ је комплексни лик $X(s)$ чиме ф-ја добијена интеграцијом трансформисана из реалних бројева у комплексне.

$$\boxed{X(s) = \int_0^\infty X(t)e^{-st}dt}$$ $X(t)$ - оригинал, $X(s)$ - s-комплексни лик

Деф. 5.1. Ако су $X^-(s)$ и $X^+(s)$. $X^{\mp}(s) = \lim_{a \to 0^{\mp}} \int_a^{+\infty} X(t)e^{-st}dt$ дефинисане за свако s, $Re\, s > \gamma$, за неки реалан број γ, онда су оне <u>лева(-) Лапласова трансформација ф-је $X(t)$</u> и <u>десна(+) -||-</u>. Акко су при томе оне једнаке онда се означавају са $X(s)$ и зовуће <u>Лапласова трансф. ф-је $X(t)$</u>.

$$X(s) = \mathcal{L}\{X(t)\}, \quad X^{\mp}(s) = \mathcal{L}^{\mp}\{X(t)\}$$

Scanned with CamScanner

(T 5.1) Да би постојала Лапласова трансформација довољно је да:

1. $X(t) \equiv 0$ за $t \in (-\infty, 0)$
2. $X(t)$ је непрекидна на интервалу $[0, +\infty)$, или има највише коначно много прекида прве врсте на сваком коначном интервалу $[0, \infty)$
3. $X(t)$ је експоненцијалног реда тј. постоје $M > 0$ и $a \in R$ тако да је $|X(t)| \leq M e^{at}$, $\forall t \in [0, \infty)$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

(22.) Које су особине Лапласове трансф.? Илустровати примерима сваку од особина

<u>Став 5.6.</u> Лапласова трансф. је линеарна трансф. тј. за њу важи закон суперпозиције. Ако временске ф-је $X_k(t)$ имају Лапласове трансф. $X_k(s)$ онда је:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k X_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{L}\{X_k(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(s)$$

<u>Став 5.7.</u> Ако је $X(t)$ диференцијабилна k-пута и ако она има Лап. трансф. $X(s)$ онда је:

$$\mathcal{L}\{x^{(k)}(t)\} = s^k X(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{i-1} x^{(k-i)}(0).$$

<u>Став 5.8.</u> Ако је $X(t)$ интеграбилна, ако она има Лапласову тр. $X(s)$ и ако је $\int_{0^-}^{0^+} X(t) dt = 0$ онда је:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t X(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

(23.) Шта су нуле, а шта полови racionalне ф-је? Илустрација примерима. Одредити Хевисајдов развој.

$$X(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} = \frac{\ell(s)}{f(s)}, \quad n \geq m$$

Број s је <u>коренска нула</u> ф-је $X(s)$, ознака s^0, када је $X(s^0) = 0$. Ф-ја $X(s)$ може да има више коренских нула $s_1^0, s_2^0, \ldots, s_\mu^0$, где је вишеструкост V_k^0.

Број s је <u>коренски пол</u> ф-је $X(s)$, ознака s^*, ако вредност ф-је у s^* тежи ∞, тј. $|X(s^*)| = +\infty$. Може да има више полова $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$, где је вишеструкост V_k^*

<u>Деф. 5.1</u> Рационална ф-ја $X(s)$ називи се правилна у бројиоцу степена m и називи се правилна у називиоцу степена $n \geq m$ је <u>недегенеративна</u> АКО је сваки пол s_i^* различит од сваке нуле s^0.
У супротном, $X(s)$ је <u>дегенеративна ф-ја</u>

Scanned with CamScanner

* Развојав разлој

$$X(s)=R_0+\frac{R_1}{s-s_1^*}+\frac{R_2}{s-s_2^*}+\dots+\frac{R_{i-1}}{s-s_{i-1}^*}+\frac{R_{i1}}{s-s_i^*}+\frac{R_{i2}}{(s-s_i)^2}+\dots+\frac{R_{iv_i^*}}{(s-s_i^*)^{v_i^*}}+\frac{R_{i+1}}{s-s_{i+1}^*}+\dots+\frac{R_n}{s-s_n^*}$$

при чему:

- R_0 је ~~резидуум~~ ф-ја $X(s)$ у тачки $s=+\infty$, $R_0=\lim\limits_{|s|\to\infty} X(s)$
- R_k, $k=1,2,i-1,i+1,n$ - резидуум у одговарајућим једноструким половима и:

$$R_k=\frac{\varphi(s)}{f'(s)}\Big|_{s=s_k^*},\quad f'(s)=\frac{df(s)}{ds},\quad R_k=\left[(s-s_k^*)X(s)\right]\Big|_{s=s_k^*}$$

- $R_{i1}, R_{i2}, R_{iv_i^*}$ - коеф. ф-ја $X(s)$ у тачки s_i^* вишеструкости v_i^* и:

$$R_{ij}=\frac{1}{(v_i^*-j)!}\frac{d^{(v_i^*-j)}}{ds^{v_i^*-j}}\left[(s-s_i)^{v_i^*}\frac{\varphi(s)}{f(s)}\right]\Big|_{s=s_i^*},\quad j=1,2,\dots,v_i^*.$$

(24.) У чему је значај прве и друге граничне теореме Лапласа?

Служе за одређивање почетних услова, стационарне грешке или неке величине управљаног објекта, стабилност система.

<u>Друга гранична теорема Лапласа</u> омогућава да се одреди крајња вредност $x(+\infty)$, ако постоји.

(Т5.9.) Ако постоји гр. вредност $x(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$ или недегенеративни облик $sX(s)$ има полове искључиво у левој полуравни комплексне s-равни, тада важи:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}x(t)=x(+\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)}$$

<u>Прва гранична теорема Лапласа</u> омогућава да се одреди почетна вредност $x(0^+)$ бр. ф-је $x(t)$ уз помоћ Лапласове тр. $X(s)$

(Т5.10.) Ако је $X(s)$ Лапласова тр. ф-је $x(t)$, и ако је она права рационална ф-ја важи:

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+}(x(t))=x(0^+)=\lim_{s\to+\infty}sX^+(s)}$$

Scanned with CamScanner

(25.) Преносна ф-ја система: дефиниција, пример добијања пр. матрице на правилно изабрани описан диф. ј-ном почетних.

<u>Деф 5.3.</u> Ф-ја $W(s)$ је <u>преносна ф-ја</u> система АКО је она количник лево Лапласових трансф. $X_i^-(s)$ и $X_u^-(s)$ када излазне и улазне величине при свим почетним условима једнаким нули:

$$\boxed{W(s)=\frac{X_i^-(s)}{X_u^-(s)},\ X_u^{(k)}(0^-)=0,\ k=0,1,\dots m-1\ ;\ X_i^{(k)}(0^-)=0,\ k=0,1,\dots,n-1}$$

$$a_n X_i^{(n)}(t)+a_{n-1}X_i^{(n-1)}(t)+\dots+a_1X_i^{(1)}+a_0X_i(t)=b_mX_u^{(m)}(t)+b_{m-1}X_u^{(m-1)}+\dots+b_1X_u^{(1)}+b_0X_u \ /\ \mathcal{L}^-$$

$$a_ns^nX_i^-(s)+a_{n-1}s^{n-1}X_i^-(s)+a_1sX_i^-(s)+a_0X_i^-(s)=b_ms^mX_u^-(s)+b_{m-1}s^{m-1}X_u^-(s)+b_1sX_u^-(s)+b_0X_u^-(s)$$

$$\boxed{W(s)=\frac{X_i^-(s)}{X_u^-(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0}}$$ → карактеристични полином

Особине:

- $W(s)$ се дефинише за линеарне стационарне системе
- $W(s)$ не зависи од Лапласове пр. улазне величине $X_u^-(s)$
- $W(s)$ је динамичка карактеристика система
- $W(s)$, у комплексном домену комплексног броја s, описује закон по коме систем преноси дејство улазне величине на излазну величину током времена
- $W(s)$ не укључује никакве информације које се тичу физичке природе система.

(26.) Преносна матрица система, дефиниција. Дати пример преносне матрице која се односи на систем са два улаза и три излаза.

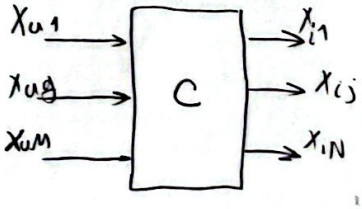
<u>Деф. 5.4.</u> Ф-ја $W_{jg}(s)$ је (j,g)-та преносна ф-ја система описаног ј-ном АКО је она количник лево Лапласових трансф. $X_{ij}^-(s)$ и $X_{ug}^-(s)$ када ј-та излазна и g-та улазна величина

$$\boxed{W_{jg}=\frac{\mathcal{L}^-\{x_{ij}(t)\}}{\mathcal{L}^-\{x_{ug}(t)\}}=\frac{X_{ij}^-(s)}{X_{ug}^-(s)}}$$

$X_u^{(k)}(0^-)=0_m$

$X_i^{(k)}(0^-)=0_m$

$X_{uk}\equiv 0$



Scanned with CamScanner

$X_{ij}(s) = W_{j1}(s)X_{u1}(s) + W_{j2}X_{u2}(s) + \dots + W_{jg}(s)X_{ug}(s) + W_{jM}X_{uM}(s)$, за N излазних величина:

$$\left.\begin{array}{l} j=1 \rightarrow \\ j=2 \rightarrow \\ j=N \rightarrow \end{array}\right\} \text{систем има } N \times M \text{ преносних ф-ја } W_{jg}(s)$$

<u>Деф. 5.5.</u> <u>Преносна матрица система</u> је $N \times M$ матрица, чији је (j,g)-ти елемент представа (j,g)-та преносна ф-ја $W_{jg}(s)$, и означава се са $W(s)$:

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1g}(s) & \dots & W_{1M}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2g}(s) & \dots & W_{2M}(s) \\ & & \vdots & & & \\ W_{j1}(s) & W_{j2}(s) & \dots & W_{jg}(s) & \dots & W_{jM}(s) \\ & & \vdots & & & \\ W_{N1}(s) & W_{N2}(s) & & W_{Ng}(s) & \dots & W_{NM}(s) \end{bmatrix} \qquad X_i(s) = W(s)X_u(s)$$

* 2 улаза, 3 излаза

Scanned with CamScanner

27. Објаснити физичко тумачење и експериментално одређивање преносне ф-је.

Нека је улазна величина система јединична импулсна ф-ја, $x_u(t)=\delta(t)$. У том случају су почетни услови од улазне величине једнаке нули, $x_u^{(j)}(0^-)=0$, а Лапласова трансф. улазне величине је $X_u(s)=1$. Излазна величина x_i тада представља импулсни одзив система $i(t)$, $x_i(t)=i(t)$ чија је Лапласова транс. $I^-(s)$, $X_i^-(s)=I^-(s)$.

$$\boxed{I^-(s)=W(s)+\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_k s^{j-1} x_i^{(k-j)}(0^-)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}}$$

$W(s)$ се може замислити неком недегенеративном преносном ф-јом $W^*(s)$ која се добија од $W(s)$ која се скрати у њеном факторизованом облику свим члановима који одговарају једнаким нулама и половима.

Став 5.11. Недег. $W^*(s)$ система је Лапласова транс. његовог импулсног одзива за нулте почетне услове:

$$\boxed{W^*(s)=\mathcal{L}^-\{i(t)\}=\int_{0^-}^{+\infty} i(t)e^{-st}dt,\ x_i^{(j)}(0^-)=0}$$

28. Објаснити и пронаћи везу између преносне матрице система и модела у пр. простору

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bx_u(t)$$
$$x_i(t)=Cx(t)+Dx_u(t)$$
$$\Big/\ \mathcal{L},\ x_0=0_x$$

$$sX(s)=AX(s)+BX_u(s) \rightarrow \boxed{X(s)=(sI-A)^{-1}BX_u(s)}$$
$$X_i(s)=CX(s)+DX_u(s) \rightarrow \boxed{X_i(s)=C(sI-A)^{-1}BX_u(s)+DX_u(s)}$$

$$\boxed{W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=C\cdot\frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)}B+D}$$

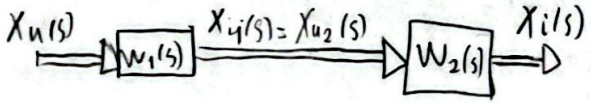
Scanned with CamScanner

(29.) (30.) (31.) Шта је блок дијаграм и када су два блока еквивалентна?

Деф. 56. Блок дијаграм система је његов структурни дијаграм у коме су сви елементи приказани овим правоугаоним ф-јама, а све величине представљене овим Лапласовим трансф.

Деф. 57. Два блок дијаграма су еквивалентна АКО су ј-не преноса, које су из њих добијене, међусобно идентичне.

(29.) Редна веза

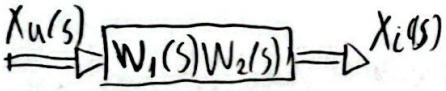


$X_i(s) = W(s) X_u(s)$

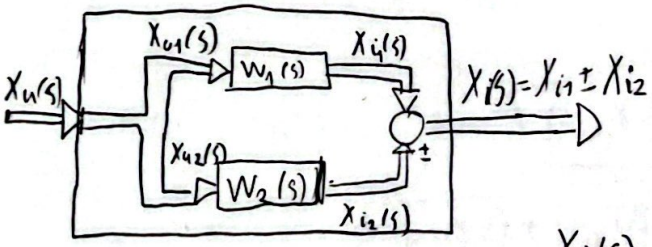
$X_{i1}(s) = W_1(s) X_u(s)$

$X_i(s) = W_2(s) X_{u2}(s) \quad / \quad X_{u2}(s) = X_{i1}(s)$

$X_i(s) = W_2(s) W_1(s) X_u(s) \rightarrow \boxed{X_i(s) = W(s) X_u(s)} \rightarrow \boxed{W(s) = W_1(s) W_2(s)}$



(30.) Паралелна веза



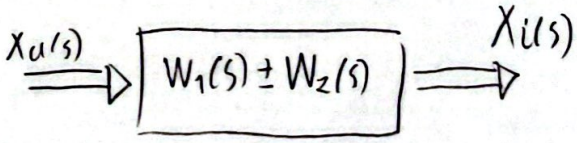
$X_{i1}(s) = W_1(s) X_{u1}(s) = W_1(s) X_u(s)$

$X_{i2}(s) = W_2(s) X_{u2}(s) = W_2(s) X_u(s)$

$X_i(s) = X_{i1}(s) \pm X_{i2}(s)$

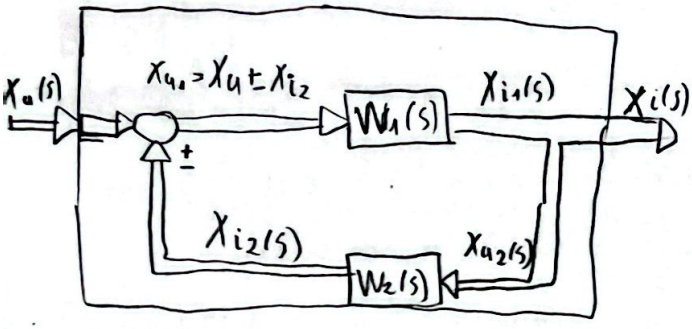
$X_i(s) = W_1(s) X_u(s) \pm W_2(s) X_u(s) = \left(W_1(s) \pm W_2(s)\right) X_u(s)$

$$\boxed{W(s) = W_1(s) \pm W_2(s)}$$



Scanned with CamScanner

31. Повратна спрега



$$X_i(s) = X_{i_1}(s) = W_1(s)\, X_{u_1}(s)$$

$$X_{i_2}(s) = W_2(s)\, X_{u_2}(s) = W_2(s)\, X_i(s)$$

$$X_{u_1}(s) = X_a(s) \pm X_{i_2}(s)$$

$$X_{u_1} = X_u(s) \pm W_2(s) X_i(s)$$

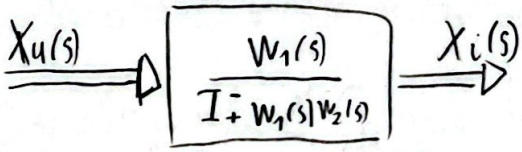
$$X_i(s) = W_1(s)\, X_u(s) \pm W_1(s) W_2(s) X_i(s)$$

$$X_i(s) \mp W_1(s) W_2(s) X_i(s) = W_1(s)\, X_u(s)$$

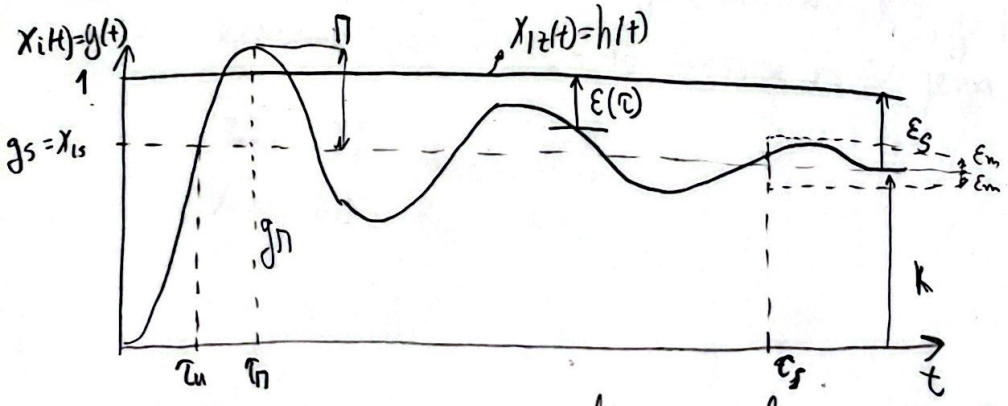
$$\left(I \mp W_1(s) W_2(s)\right) X_i(s) = W_1(s)\, X_u(s)$$

$$\boxed{X_i(s) = \frac{W_1(s)}{I \mp W_1(s) W_2(s)}\, X_u(s)}$$

$$\boxed{W(s) = \frac{W_1(s)}{I \mp W_1(s) W_2(s)}}$$



32. Показатељи квалитета прелазног процеса управљачког објекта



- <u>Прескок</u> (П) карактерише режим вредности врха максимума прелазне f-це $g_П$ и њене вредности у стационарном стању g_s. $\boxed{П = \frac{g_П - g_s}{g_s} \cdot 100\%}$

Овај показатељ је мера квалитета $g(t)$. Оно укazuje на осцилације у систему.

- <u>Време успостављања прескока</u> ($\tau_П$): $\tau_П$: $\boxed{g(\tau_П) = g_П}$

Scanned with CamScanner

- <u>Време успона</u> (τ_u), је време које је потребно да прелазак од тренутка кад прелазна ф-ја достигне 10% до тренутка када достигне 90% своје вредности у стац. режиму код апериодичних одзива, а у случају осцилаторног одзива, од 0% до 100% стац. вредности.

- <u>Време смирења</u> (τ_s), је први тренутак када прелазна ф-ја уђе и више не изађе из унапред утврђеног опсега $\pm\varepsilon_m$ око вредности у стационарном стању.

$$\tau_s : \boxed{|g(t)-g_s| \leq \varepsilon_m \,,\ \forall t \geq \tau_s}$$

Максимална дозвољена апсолутна вредност одступања прелазне ф-је од њене вредности у стационарном режиму ε_m је најчешће 2% или 5% од вредности прелазне ф-је у стац. режиму.

Претходно дефинисани показатељи описују прелазне ф-је система.

- <u>Статичка грешка</u> (ε_s), представља коначну вредност грешке излазне величине објекта, око ка коначна вредност постаје: $\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)}$

- <u>Појачање</u> (K), је коначна вредност прелазне ф-је $g(t)$ објекта, око постаје: $\boxed{K = \lim_{t\to\infty} g(t)}$

Scanned with CamScanner

ГРУПА В

① Позиционе r-тог реда система: дефиниција, одређивање, матрица

<u>Деф. 6.1.</u> Позиционе r-тог реда система (K^r) је пропорција једнакој r-тој изводу излазне ф-је система када време неограничено расте, а за нулте поч. услове, АКО она постоји: $\boxed{K^r = \lim_{t\to+\infty} g^{(r)}(t)}$

Оно показује колико пута систем у стац. радном режиму даје веће једнако r-тог излаза сваг улаза у односу на улаз.

$r=0 \Rightarrow K^0 = \lim_{t\to\infty} g(t)$ → позиционо позиционе

$r=1 \Rightarrow K^1 = \lim_{t\to\infty} \dot{g}(t)$ → брзинско -||-

$r=2 \Rightarrow K^2 = \lim_{t\to\infty} \ddot{g}(t)$ → акцелерационо -||-

* На основу Лапласа

$$\lim_{t\to\infty} g^{(r)}(t) = \lim_{s\to 0} s\,\mathcal{L}\{g^{(r)}(t)\}, \quad \mathcal{L}\{g^{(r)}(t)\} = s^r \frac{1}{s} \rightarrow \boxed{K^r = \lim_{s\to 0} s^r W(s)}$$

<u>Деф. 6.2.</u> Матрица позиционе r-тог реда система (K^r), је $N\times M$ матрица чији (j,g)-ти елемент представља (j,g)-ту позиционе r-тог реда K^r_{jg}.

$$K^r = \begin{bmatrix} K^r_{11} & K^r_{12} & \cdots & K^r_{1g} & \cdots & K^r_{1M} \\ K^r_{21} & K^r_{22} & \cdots & K^r_{2g} & \cdots & K^r_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K^r_{j1} & K^r_{j2} & \cdots & K^r_{jg} & \cdots & K^r_{jM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K^r_{N1} & K^r_{N2} & \cdots & K^r_{Ng} & \cdots & K^r_{NM} \end{bmatrix}$$

② Брзе система. Дати пример по избору за сваку врсту система.

Посматра се дедуктивни преносни систем, где је $W(s) = \dfrac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}$, $m \le n$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le M \le m,\ b_0 = \dots = b_{M-1} = 0,\ b_M \ne 0,\ b_m \ne 0 \\ 0 \le N \le n,\ a_0 = \dots = a_{N-1} = 0,\ a_N \ne 0,\ a_n \ne 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{W(s) = \frac{s^M}{s^N} \cdot \frac{\sum_{k=M}^{m} b_k s^{k-M}}{\sum_{k=N}^{n} a_k s^{k-N}}}$$

Scanned with CamScanner

Уведемо ознаке $L = M - N \rightarrow \boxed{W(s) = s^L W_1(s)}$

При претпоставци да су сви бројеви $W_1(s)$ $\overset{\mathbb{R}}{\text{нетипични}}$: $\lim\limits_{s\to 0} W_1(s) = \frac{b_M}{a_N}$

Према тому и вредности L постоје три случаја:

① $L > 0$, $M > N$ - систем 1. реда: $\boxed{K^r = \lim\limits_{s\to 0} s^r s^L W_1(s) = 0, \ \forall r = 0, 1 \dots}$

Дакле систем 1. реда имаће сва нулта почетна.

$$W(s) = \frac{s^3 + s^2}{s^3 + s^2 + 2s} = s^1 \frac{s+1}{s^2+s+2}$$

② $L = 0$, $M = N$ - систем 2. реда: $K^r = \lim\limits_{s\to 0} s^r W_1(s) = \lim\limits_{s\to 0} W_1(s) \lim\limits_{s\to 0} s^r = \begin{cases} \frac{b_M}{a_N}, & r = 0 \\ 0, & r = 1, 2 \dots \end{cases}$

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = s^0 \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

③ $L < 0$, $M < N$ - систем 3. реда: $K^r = \lim\limits_{s\to 0} s^r s^L W_1(s) = \lim\limits_{s\to 0} s^{r-|L|} W_1(s) = \begin{cases} +\infty \operatorname{sign} \frac{b_M}{a_N}, & r = 0, 1 \dots |L| - 1 \\ \frac{b_M}{a_N}, & r = |L| \\ 0, & r = |L| + 1 \dots \end{cases}$

$$W(s) = \frac{2}{s^3 + s^2 + s} = s^{-1} \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

③ Типови дејстава система. Дати примере ПД, ПИ и ПИД дејстава, до изводу.

~~① Диференцирајућо (Д) дејство у случају када је десна страна~~

$$T_n^n x_i^{(n)} + \dots + T_1 \dot{x}_i + x_i = \begin{cases} k_{D_1} \dot{x}_u + k_{D_2} \ddot{x}_u + \dots + k_{D_m} x_u^{(m)} & (1) \\ k x_u & (2) \\ k x_u + k_{D_1} \dot{x}_u + \dots + k_{D_m} x_u^{(m)} & (3) \\ k_I \int_0^t x_u(\tau) d\tau & (4) \\ k x_u + k_I \int_0^t x_u(\tau) d\tau & (5) \\ k x_u + k_I \int_0^t x_u(\tau) d\tau + k_{D_1} \dot{x}_u + \dots + k_{D_m} x_u^{(m)} & (6) \end{cases}$$

① Диференцирајућо (Д) дејство у случају када је десна страна облика (1), преносна ф-ја облика:

$$W(s) = s \frac{k_{D_1} + k_{D_2} s + \dots + k_{D_m} s^{m-1}}{T_n^n s^n + T_{n-1}^{n-1} s^{(n-1)} + \dots T_1 s + 1} \rightarrow \underline{\text{систем треће врсте}}$$

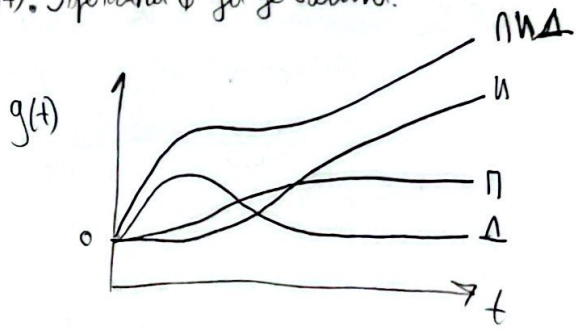
② Пропорционално (П) дејство када је десна страна облика (2), тада је пр. ф-ја:

$$W(s) = \frac{k}{T_n^n s^n + T_{n-1}^{n-1} s^{n-1} + \dots + T_1 s + 1} \rightarrow \underline{\text{систем друге врсте}}$$

Scanned with CamScanner

③ Интегрално (И) дејство када је десна страна у-но одмах (4). Преносна ф-ја је одмах:

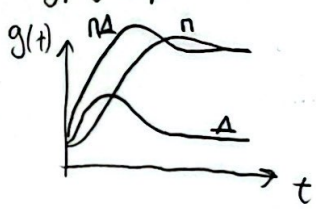
$$W(s)=\frac{K_I}{s(T_n^n s^n+\dots+T_1 s+1)} \rightarrow \text{сиситем треће врсте}$$



④ Пропорционално диференцијални (ПД), (3):

$$W(s)=\frac{K+K_{D_1}s+K_{D_2}s^2+\dots+K_{D_m}s^m}{T_n^n s^n+T_{n-1}^{n-1}s^{n-1}+\dots+T_1 s+1} \rightarrow \text{пригада сиситема друге врсте}$$

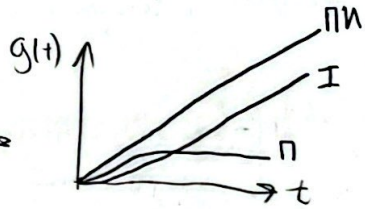
$$W(s)=\frac{3+2s}{s^2+2s+2}=W_П(s)+W_Д(s)=\frac{3}{s^2+2s+2}+\frac{2s}{s^2+2s+2} \rightarrow$$



⑤ Пропорционално интегрално дејство (ПИ), (5):

$$W(s)=\frac{K+\frac{K_I}{s}}{T_n^n s^n+T_{n-1}^{n-1}s^{n-1}+\dots+T_1 s+1} \rightarrow \text{трета врста}$$

$$W(s)=\frac{3+\frac{2}{s}}{s^2+2s+2}=W_П(s)+W_I(s)=\frac{3}{s^2+2s+2}+\frac{2}{s(s^2+2s+2)} \rightarrow$$



⑥ (ПИД), (6)

$$W(s)=\frac{K+\frac{K_I}{s}+K_{D_1}s+\dots+K_{D_m}s^m}{T_n^n s^n+T_{n-1}^{n-1}s^{n-1}+\dots+T_1 s+1} \rightarrow \text{трета врста};\quad W(s)=\frac{5+\frac{2}{s}+7s}{s^2+2s+2}=\overset{П}{\frac{5}{s^2+2s+2}}+\overset{И}{\frac{2}{s(s^2+2s+2)}}+\overset{Д}{\frac{7s}{s^2+2s+2}}$$

Прво је доминантно Д, па П, па И.

Д – 1. врста; ПД – 2. врста, И, ПИ, ПИД – 3. врста

④ Статичка грешка управљане величине. Деф. и одређивање у t и s домену

Деф. 6.3 Статичка грешка управљане величине настала при јединичним одскочним променама свих улазних величина, а при нултим почетним условима, је позициона статичка грешка ε_{sp} управљане величине x_i:

$$\varepsilon_{sp}=\lim_{t\to+\infty}\left[x_{iz}(t)-x_i(t)\right]=\lim_{t\to\infty}\left[h(t)-x_i(t)\right] \rightarrow \varepsilon_{sp}=\varepsilon_s \rightarrow \text{статичка грешка}$$

Деф. 6.4. Статичка грешка управљане величине ~~стабла~~ настала при нагибним променама свих улазних величина, а при нултим почетним условима, је брзинска статичка грешка ε_{sv} управљане величине x_i:

$$\varepsilon_{sv}=\lim_{t\to\infty}\left[x_{iz}(t)-x_i(t)\right]=\lim_{t\to\infty}\left[h(t)-x_i(t)\right]$$

Scanned with CamScanner

Деф. 6.5. Статичка грешка управљане величине настала при одређеним параметрима свих улазних величина, а при нултим почетним условима, је ~~апсолутна~~ статичка грешка ε_{sa} управљане величине x_i:

$$\varepsilon_{sa} = \lim_{t\to\infty}\left[x_{iz}(t) - x_i(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}t^2 h(t) - x_i(t)\right]$$

$$\varepsilon_{sp} = \lim_{s\to 0} s E(s) = \lim_{s\to 0} s\,\mathcal{L}\{h(t) - x_i(t)\} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s} - X_i(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[1 - sX_i(s)\right]$$

$$\varepsilon_{sv} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s^2} - X_i(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s} - sX_i(s)\right]$$

$$\varepsilon_{sa} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s^3} - X_i(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s^2} - sX_i(s)\right]$$

* Веза ε_s и K

$$X_i(s) = W_{xiz}(s)\,X_{iz}(s) + W_z(s)\,Z(s)\ ;\quad \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s E(s) = \lim_{s\to 0} s\left[X_{iz}(s) - X_i(s)\right] = \lim_{s\to 0} s\left[X_{iz}(s) - W_{xiz}(s)X_{iz}(s) - W_z(s)Z(s)\right]$$

$$\varepsilon_s = \underbrace{\lim_{s\to 0} s\left[(1 - W_{xiz}(s))X_{iz}(s)\right]}_{\varepsilon_{sx_{iz}}} + \underbrace{\left(-\lim_{s\to 0} s\,W_z(s)\,Z(s)\right)}_{\varepsilon_{sz}} = \varepsilon_{sx_{iz}} + \varepsilon_{sz}$$

$$\varepsilon_{sx_{iz}} = \lim_{s\to 0} s\left[1 - W_{xiz}(s)\right]\cdot\frac{1}{s} = 1 - K_{xiz}\ ;\quad \varepsilon_{sz} = \lim_{s\to 0} s\,W_z(s)\frac{1}{s} = -K_z$$

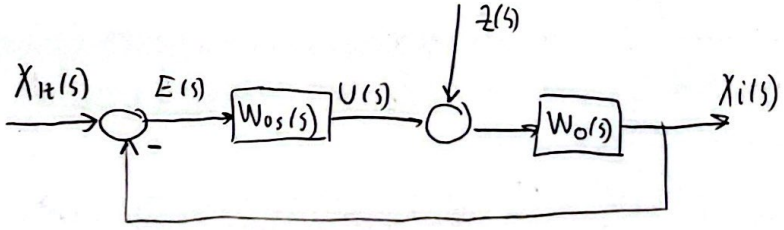
$$\boxed{\varepsilon_{sx_{iz}} + K_{xiz} = 1}$$

$$\boxed{\varepsilon_{sz} + K_z = 0}$$

5. Утицај врсте управљачког система на статичку грешку

- Одређивање врсте врсте

За одређивање врсте врсте је $P>0$ и пратимо вредност $\lim_{s\to 0}$ добијену до тада да је мањи s^P



Scanned with CamScanner

$$X_i(s) = \frac{W_{us}(s)\,W_o(s)}{1+W_{us}(s)\,W_o(s)}\,X_{1z}(s) + \frac{W_o(s)}{1+W_{us}(s)\,W_o(s)}\,Z(s)$$

$$E(s) = X_{1z} - X_i(s) = \underbrace{\frac{1}{1+W_{us}(s)\,W_o(s)}\,X_{1z}(s)}_{E_{x1z}(s)} - \underbrace{\frac{W_o(s)}{1+W_{us}(s)\,W_o(s)}\,Z(s)}_{E_z(s)} \quad \Big/ \cdot\; X_{1z}(s) = Z(s) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{E(s) = \frac{1-W_o(s)}{1+W_{us}(s)\,W_o(s)}\,\frac{1}{s}}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1-W_o(s)}{1+W_{us}(s)\,W_o(s)} \quad \Big/ \quad \begin{matrix} W_{us}(s) = s^L W_1(s) \\ W_o(s) = s^P W_2(s) \end{matrix}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0}\frac{1-s^P W_2(s)}{1+s^{L+P}W_1(s)\,W_2(s)} \quad \Big/ \quad \lim_{s\to 0} W_1(s) = \frac{b_M}{a_N},\quad \lim_{s\to 0} W_2(s) = \frac{d_M}{c_n}$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sx1z} + \varepsilon_{sz} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+s^{L+P}\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}} - \lim_{s\to 0}\frac{s^P\frac{d_M}{c_n}}{1+s^{L+P}\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}}$$

- Одређивање прве грешке

– Пошто је $P>0$ и претпоставка вредности $\lim_{s\to 0}$ долази мало s^P до 0, па је $\varepsilon_{sz}=0$, па је

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sx1z} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+s^{L+P}\frac{d_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}}$$

$$\varepsilon_s = \begin{cases} 1, & L>0,\ \text{ЈС 1. грешке} \\ 1, & L=0,\ 2. \\ 1, & -P<L<0,\ 3. \\ \frac{1}{1+\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}}, & L=-P,\ 3. \\ 0, & L<-P,\ 3. \end{cases} \Rightarrow$$

– Само ЈС 3. грешке утиче на сложене статичке грешке

- Одређивање друге грешке

– $P=0$, па је $s^P=1 \rightarrow \varepsilon_{sx1z} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+s^L\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}}$, $\varepsilon_{sz} = -\lim_{s\to 0}\frac{\frac{d_M}{c_n}}{1+s^L\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}}$

$$\varepsilon_s = \begin{cases} \underbrace{1}_{\varepsilon_{sx1z}} - \underbrace{\frac{d_M}{c_n}}_{\varepsilon_{sz}}, & L>0,\ 1.\ \text{грешка} \\ \frac{1}{1+\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}} - \frac{\frac{d_M}{c_n}}{1+\frac{b_M}{a_N}\frac{d_M}{c_n}}, & L=0,\ 2.\ \text{грешка} \\ 0, & L<0,\ 3.\ \text{грешка} \end{cases}$$

само 3. грешке се користи, јер 1. и 2. зависе од коеф. a, b, c, d

• Одговор треће врсте

- $P<0$, па важи:

$$\varepsilon_{sxz} = \begin{cases} 1 \\ \frac{a_N C_n}{a_N C_n + b_m d_m'} \\ 0, \\ 0, \\ 0, \end{cases} \begin{matrix} L>-P, & 1. \\ L=-P, & 1. \\ 0<L<-P, & 1. \\ L=0, & 2. \\ L<0, & 3. \end{matrix} \quad , \quad \varepsilon_{sz} = \begin{cases} \infty, & L>0, & 1. \\ -\frac{a_N}{b_M}, & L=0, & 2. \\ 0, & L<0, & 3. \end{cases}$$

ОБЈЕКТ

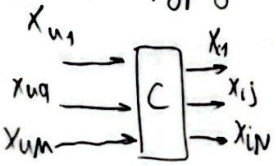
УС:	1.	2.	3.
1. – Д	НЕ	НЕ	НЕ САМЕ
2. – П, ПД	НЕ	МОЖЕ	МОЖЕ
3. – И, ПИ, ПИД	ДА	ДА	ДО

⑥ Дефинисање фреквентне карактеристике и фреквентне матрице

Деф. 7.2. Фреквентна карактеристика $F(j\omega)$ система $x_u \to \boxed{C} \to x_i$ чији је математички модел $\dot{X} = AX + Bx_u$, $x_i = CX + Dx_u$ је количник Фуријеових трансформација излазне и улазне величине при свим почетним условима једнаким нули:

$$F(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{x_i(t)\}}{\mathcal{F}\{x_u(t)\}} = \frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)}, \quad x_u^{(k)}=0,\ k=0,1\dots m-1,\ x_i^{(k)}=0,\ k=0,1\dots,n-1$$

Деф. 7.3. Ф-ја $F_{jq}(j\omega)$ је (j,q)-та фреквентна карактеристика система АКО је она количник Фуријеових трансф. $X_{ij}(j\omega)$ и $X_{uq}(j\omega)$ када је j-ти излаз и q-ти улазни величине



$$F_{jq}(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{x_{ij}(t)\}}{\mathcal{F}\{x_{uq}(t)\}} = \frac{X_{ij}(j\omega)}{X_{uq}(j\omega)}, \quad x_u^{(k)}(0)=0,\ x_i^{(k)}(0)=0, \quad x_{uk}(t)\equiv 0,\ k\neq q$$

Деф. 7.4. ~~Фреквентна матрица система~~ је $N\times M$ матрица ф-ја, чији је (j,q)-ти део када (j,q)-ти ~~трансформација~~ фреквентна карактеристика $F_{jq}(j\omega)$ и означава се са $F(j\omega)$:

$$F(j\omega) = \begin{bmatrix} F_{11}(j\omega) & F_{12}(j\omega) & \dots & F_{1q}(j\omega) & \dots & F_{1M}(j\omega) \\ F_{21}(j\omega) & F_{22}(j\omega) & \dots & F_{2q}(j\omega) & \dots & F_{2M}(j\omega) \\ & & \vdots & & & \\ F_{j1}(j\omega) & F_{j2}(j\omega) & \dots & F_{jq}(j\omega) & \dots & F_{jM}(j\omega) \\ & & \vdots & & & \\ F_{N1}(j\omega) & F_{N2}(j\omega) & \dots & F_{Nq}(j\omega) & \dots & F_{NM}(j\omega) \end{bmatrix}$$

$$X_i(j\omega) = F(j\omega)\,X_u(j\omega)$$

$$X_i(j\omega) = \mathcal{F}\{x_i(t)\}$$

$$X_u(j\omega) = \mathcal{F}\{x_u(t)\}$$

Scanned with CamScanner

7. Фреквентна карактеристика за УН и УСН система

*УН

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x_u^{(k)}(t) \quad / F$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X_i(j\omega)\cdot(j\omega)^k = \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k X_u(j\omega)$$

$s = j\omega$

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{X_o(j\omega)}{X_u(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}}, \quad W(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (s)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (s)^k}$$

$\hookrightarrow F(j\omega) = W(s)/_{s=j\omega}$

*УСН

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BX_u(t) \\ X_i(t) &= CX(t) + DX_u(t) \end{aligned}\right\} W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D\,\Big|_{s=j\omega} \Rightarrow \boxed{F(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D}$$

8. Експериментално одређивање фреквентне кар. система

Нека је $X_u = X_{u0}\sin\omega t \cdot h(t)$, а сви почетни услови нула.

$X_i(t) = X_{in}(t)$:

$$X_{in}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_{in}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)X_u(s)\}$$

$X_{in}(t) = X_{ih}(t) + X_{ip}(t)$.

Хомогено решење зависи од типова $W(s)$. Партикуларно решење има облик облика:

$X_{ip}(t) = X_{io}(\omega)\cdot\sin(\omega t + \theta(\omega))\cdot h(t)$. Експериментално одређивање фрек. кар. се заснива на вези $F(j\omega)$ са $X_{io}(\omega)$ и $\theta(\omega)$.

<u>Претпоставка 7.3.</u> Хомогено решење нестаје после времена: $\lim_{t\to\infty} X_{in}(t) = 0$

Тада, након времена T, важи: $X_i(t) = X_{ip}(t)$, $t \in (T, +\infty)$

$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\arg F(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, где је $|F(j\omega)|$ модуо отпора са $A(\omega)$, а аргумент са $\varphi(\omega)$.

<u>Став 7.4.</u> Модуо и аргумент фреквентне карактеристике $F(j\omega)$ посматраног система су одређени са:

1. $A(\omega)$ је количник амплитуде $X_{io}(\omega)$ парт. решења X_{ip} и амплитуде X_{uo} улазне синусне осциласије:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{X_{io}(\omega)}{X_{uo}}}$$

Scanned with CamScanner

2. $\varphi(\omega)$ је једнако фазном померају $\theta(\omega)$ излазног решења X_{ip}:

$$\boxed{\varphi(\omega) = \theta(\omega)}$$

При извођењу експеримента важи: $X_{u0}=const.$, X_{i0} и θ су ф-ја (ω).

Експеримент се изводи на следећи начин: задаје се фреквенција вредност за ω и снима се $X_u(t)=X_{u0}\sin\omega t$. Упоредо се снима и $X_i(t)$. После времена T, када је $X_{ih}=0$, тј. када се амплитуда синусне промене излазне величине довољно мала, тада важе претходне ј-не. Након снимљених $X_{i0}(\omega)$ и $\theta(\omega)$ одређује се $F(j\omega)$:

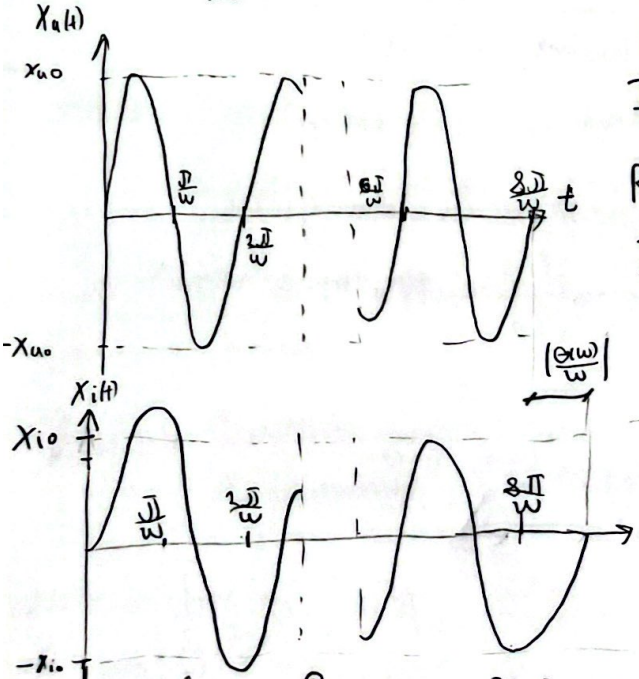
$$\boxed{F(j\omega) = \frac{X_{i0}(\omega)}{X_{u0}} e^{j\theta(\omega)}}$$

9. Основне фреквентне карактеристике

$F(j\omega)$ је разломљена ф-ја имаginарне променљиве $j\omega$. У декартовом облику:

$F(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$, $R(\omega) = Re\, F(j\omega)$, $I(\omega) = Im\, F(j\omega)$.

$$F(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k} = \frac{R_1(\omega) + jI_1(\omega)}{R_2(\omega) + jI_2(\omega)}, \quad m = \text{бројач}, \ n = \text{називач}$$



$$R_1(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} b_m \omega^m$$

$$I_1(\omega) = \omega\left[b_1 - b_3\omega^2 + \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} b_{m-1}\omega^{m-2}\right]$$

$$R_2(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_{n-1}\omega^{n-1}$$

$$I_2(\omega) = \omega\left[a_1 - a_3\omega^2 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n \omega^{n-1}\right]$$

$$R_i(-\omega) = R_i(\omega); \quad I(-\omega) = -I(\omega)$$

$$R(\omega) = \frac{R_1(\omega)R_2(\omega) + I_1(\omega)I_2(\omega)}{R_2^2(\omega) + I_2^2(\omega)}$$

$$I(\omega) = \frac{I_1(\omega)R_2(\omega) - R_1(\omega)I_2(\omega)}{R_2^2(\omega) + I_2^2(\omega)}$$

<u>Закључак 7.5.</u> Реални део $R(\omega)$ фрек. кар. $F(j\omega)$ је парна ф-ја од ω, а имагинарни део $I(\omega)$ је непарна ф-ја од ω:

$$\boxed{R(-\omega) = R(\omega); \quad I(-\omega) = -I(\omega)}$$

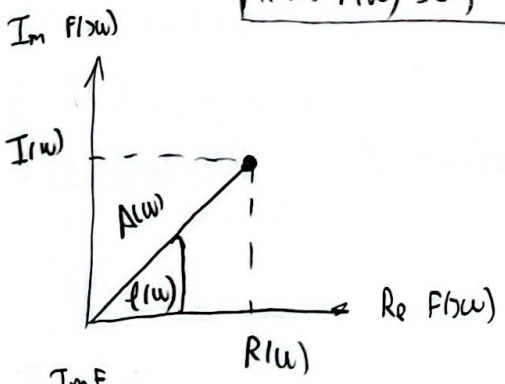
Scanned with CamScanner

$$|F(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)} = \frac{\sqrt{R_1^2(\omega)+I_1^2(\omega)}}{\sqrt{R_2^2(\omega)+I_2^2(\omega)}}$$

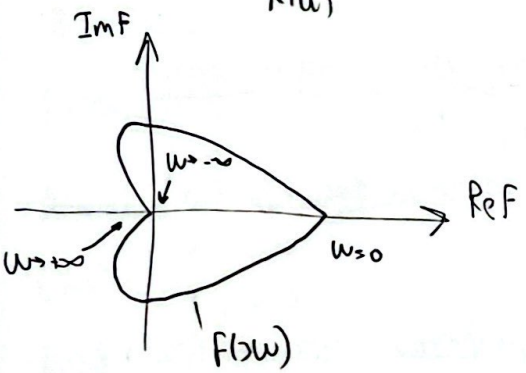
$$\operatorname{Arg} F(j\omega) = \varphi(\omega) = \operatorname{Arctg}\frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \operatorname{Arctg}\frac{I_1(\omega)}{R_1(\omega)} - \operatorname{Arctg}\frac{I_2(\omega)}{R_2(\omega)}$$

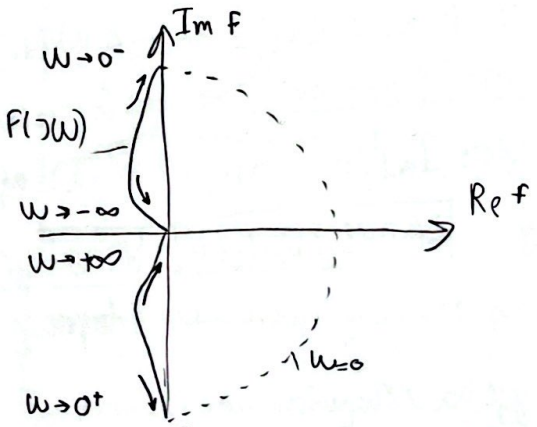
<u>Својство 7.6.</u> Модул $A(\omega)$ је парна ф-ја од ω, а аргумент $\varphi(\omega)$ је непарна ф-ја од ω:

$$\boxed{A(-\omega) = A(\omega) \geq 0\ ;\quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)}$$

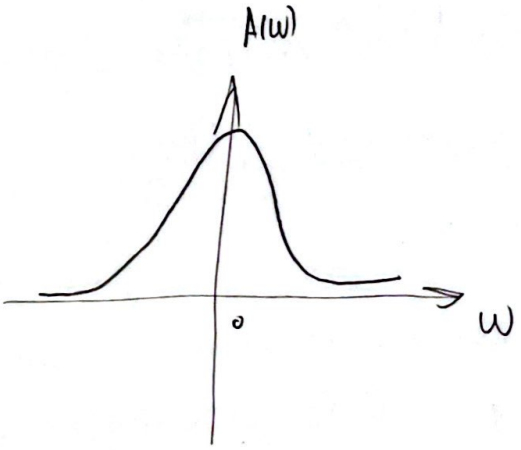


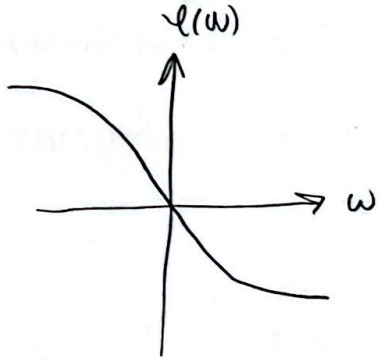
Уколико је за сваку вредност ω одређена са Re, Im, φ, A назвали се <u>облик фрек. карактеристике</u> F. Тј. ако мењамо ω и цртамо $F(j\omega)$ у односу на $\omega \in (-\infty, +\infty)$ назвали се <u>годограф фреквентне карактеристике</u>.





Модул $A(\omega)$ назвали се <u>амплитудно фреквентна карактеристика</u>, а аргумент $\varphi(\omega)$ је <u>фазно фрек. кар.</u>

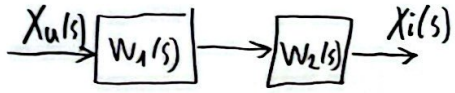




Scanned with CamScanner

10. Логаритамска фреквентна карактеристика

Посматра се редна спрега:



$$\boxed{F(j\omega)=F_1(j\omega)F_2(j\omega)}$$

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}$$

$$\boxed{A(\omega)=A_1(\omega)A_2(\omega)}$$

$$\boxed{\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)}$$

При цртању жељеног $F(j\omega)$, $\varphi(\omega)$ се одређује сабирањем $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$, а за $A(\omega)$ неопходно је множити $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$. За ову сврху уведе се логаритамска фреквентна карактеристика дефинисана са:

$$\boxed{20\log F(j\omega)=20\log A(\omega)+j20\varphi(\omega)\log e}$$

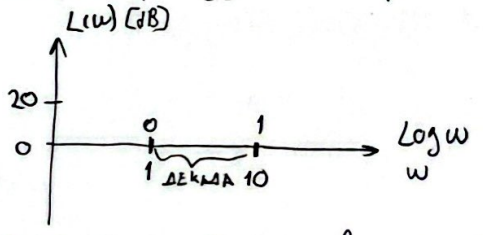
Реални део: $Re(20\log F(j\omega))=20\log A(\omega)$ [dB], назива се логаритамска амплитудно фреквентна карактеристика и означава се са $L(\omega)$.

Имаginарни део: $Im(20\log F(j\omega))=20\varphi(\omega)\log e$, одређен је фазном фрек. кар. $\varphi(\omega)$.

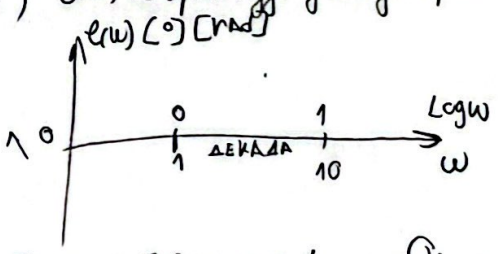
Аналогно следи: $\boxed{L(\omega)=L_1(\omega)+L_2(\omega)}$ $\boxed{\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)}$

↳ Лог. амп. фр. кар. ($L(\omega)$) добија се сабирањем $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$, а фазна... сабирањем $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$

$L(\omega)$ се приказује на логаритамској дијаграму:, $\varphi(\omega)$ се приказује у полулогаритамској дијаграму:



БОДЕОВИ ДИЈАГРАМИ →



У пракси цртање се своди на познавање елементарних преносних ф-ја. Оне су:

1. $W(s)=K\in R,\ K\neq 0$
2. $W(s)=s$
3. $W(s)=1\pm Ts,\ T\in(0,+\infty)$
4. $W(s)=T^2s^2\pm T_1s+1,\ T_1\in(0,+\infty),\ 0<\frac{T_1}{2T_2}<1$
5. $W(s)=T^2s^2+1$

Scanned with CamScanner

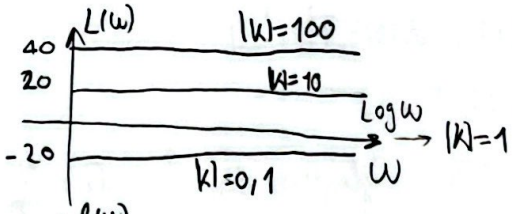
11. Лог. фрек. хар. елементарните предавателни ф-ци $W(s)=k$, $W(s)=s$ и $W(s)=1\pm Ts$.
Аналитичен и графичен израз

* $W(s)=k \in R,\ k\neq 0$

$$F(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}=k=|k|=\begin{cases} e^{j0}, & k>0 \\ e^{j\pi}, & k<0 \end{cases}$$

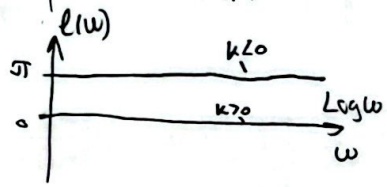
$A(\omega)=|k|$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} 0, & k>0 \\ \pi, & k<0 \end{cases}$$



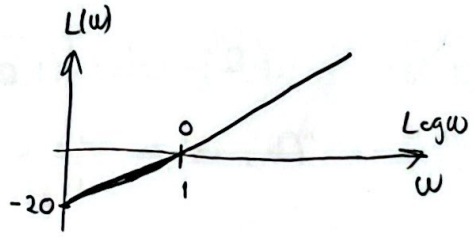
$L(\omega)=20\log|k|$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} 0, & k>0 \\ \pi, & k<0 \end{cases}$$



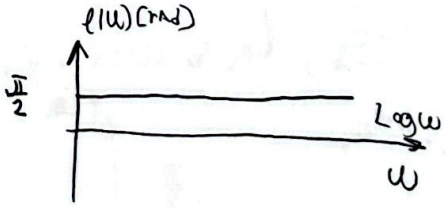
* $W(s)=s$

$$F(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}=j\omega=|\omega|\begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}}, & \omega>0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \omega<0 \end{cases}$$



$A(\omega)=|\omega|$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega<0 \end{cases}$$



$L(\omega)=20\log|\omega|$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega<0 \end{cases}$$

* $W(s)=1\pm Ts$

$F(j\omega)=W(s)\big|_{s=j\omega}=1\pm jT\omega$. Въвеждаме времевата честотна $\omega_n=\frac{1}{T}$ и нормираната честотна $\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}=T\omega$.

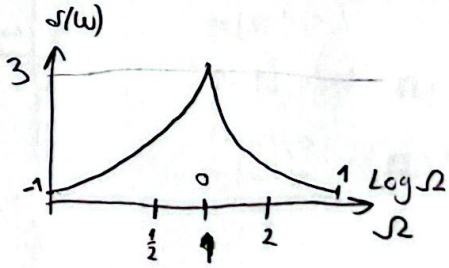
$F(j\Omega)=1\pm j\Omega=\sqrt{1+\Omega^2}\,e^{\pm j\cdot \mathrm{Arctg}\,\Omega}$ $\qquad L(\Omega)=20\log\sqrt{1+\Omega^2}$

$A(\Omega)=\sqrt{1+\Omega^2}$, $\varphi(\Omega)=\pm\,\mathrm{Arctg}\,\Omega$ $\qquad \varphi(\omega)=\pm\,\mathrm{Arctg}\,\Omega$

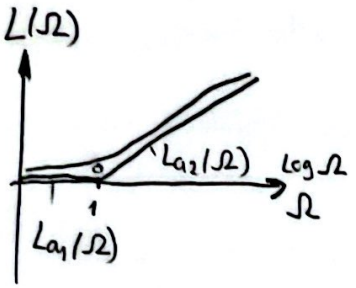
$L(\omega)$ има две апроксимации: La_1 за $0<\Omega<1$ → $\boxed{La_1(\Omega)=0}$ и La_2 за $\Omega>1$ → $\boxed{La_2(\Omega)=20\log\Omega}$

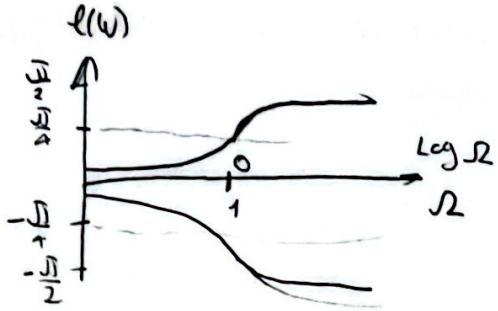
Тогава се получава грешка $\delta(\Omega)$:

$$\delta(\Omega)=\begin{cases} L(\Omega)-La_1(\Omega)=20\log\sqrt{1+\Omega^2}, & 0<\Omega<1 \\ L(\Omega)-La_2(\Omega)=20\log\sqrt{1+\frac{1}{\Omega^2}}, & \Omega\geq 1 \end{cases} \rightarrow$$



Scanned with CamScanner





(12.) -||- за $W(s)=T_2^2s^2\pm T_1s+1$, $W(s)=T_2^2s^2+1$

* $W(s)=T_2^2s^2\pm T_1s+1$, $0<\frac{T_1}{2T_2}<1$, $T_1>0$

$F(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}=1-T_2^2\omega^2\pm jT_1\omega$. Уведи се $\omega_n=\frac{1}{T_2}$, $\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}=T_2\omega$ и сиеен коефициентот

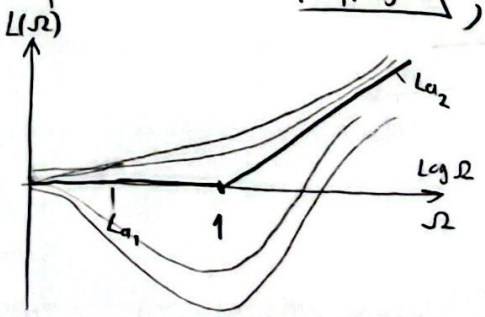
$\zeta=\frac{T_1}{2T_2}\in(0,1)$.

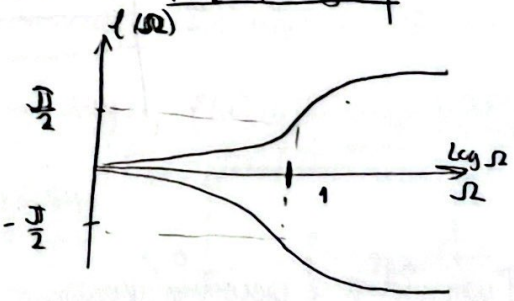
$$F(j\Omega)=1-\Omega^2\pm j2\zeta\Omega=\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}\;e^{\pm j\,\mathrm{Arctg}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}}$$

$$A(\Omega)=\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}\qquad L(\Omega)=20\log\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}$$

$$\ell(\Omega)=\pm\mathrm{Arctg}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}\qquad \ell(\Omega)=\pm\mathrm{Arctg}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}=\begin{cases}\pm\mathrm{Arctg}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}, & \Omega\le1\\ \pm\left[\pi-\;\right], & \Omega\ge1\end{cases}$$

La_1 за $0<\Omega\ll1\to\boxed{La_1(\Omega)=0}$; La_2 за $\Omega\gg1\to\boxed{La_2=40\log\Omega}$





* $W(s)=T_2^2s^2+1$

$F(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}=1-T_2^2\omega^2$, $\omega_n=\frac{1}{T_2}$, $\Omega=T_2\omega$.

$$F(j\Omega)=1-\Omega^2=|1-\Omega^2|\begin{cases}e^{j0}, & |\Omega|<1\\ e^{j\pi}, & |\Omega|>1\end{cases}$$

$A(\Omega)=|1-\Omega^2|$

$$\ell(\Omega)=\begin{cases}0, & |\Omega|<1\\ \pi, & |\Omega|>1\end{cases}$$

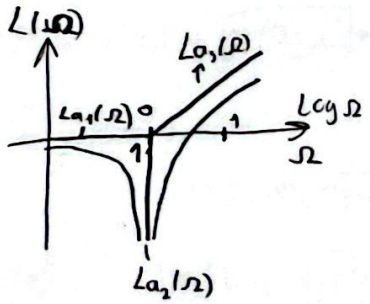
$L(\Omega)=20\log|1-\Omega^2|$

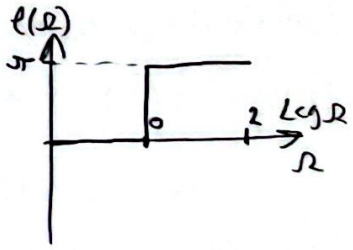
$$\ell(\Omega)=\begin{cases}0, & |\Omega|<1\\ \pi, & |\Omega|>1\end{cases}$$

La_1 за $0<\Omega<1\to\boxed{La_1=0}$

La_2 за $\Omega\to1\to\boxed{La_2(\Omega)=(0,-\infty)}$

La_3 за $\Omega\gg1\to\boxed{La_3(\Omega)=40\log\Omega}$





Scanned with CamScanner