

1. Величина кретања појмине. Импулс сине.

* Кр. кр. појмине ($\vec{k}$) - векторска величина која је једнака промену
маса m појмине и брине $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{k} = m \vec{v}}, \quad [k] = [m \vec{v}] = MLT^{-1} \rightarrow \frac{kgm}{s} = Ns$$

* Елементарни импулс сине

Ел. имп. сине ($d\vec{I}$) - лек. величина једнака промену сине $\vec{F}$
која делује на појмину и бесконачно малим интервалом dt .

$$\boxed{d\vec{I} = \vec{F} dt}$$

akademijazamasince.com

* Укупни импулс сине

Импулс сине ($\vec{I}$) - лек. вел. резултат сине $\vec{F}$ у временском интервалу $(t_0; t)$.

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt}$$

- Импулс импулса, промена и смер одређени су исто променом и
коэф. система $Oxyz$.

$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$, где су $I_x = \vec{I} \cdot \vec{i}$, $I_y = \vec{I} \cdot \vec{j}$, $I_z = \vec{I} \cdot \vec{k}$ пројекција импулса сине на осе.

Углови и смер: $\cos \varphi(\vec{I}, \vec{i}) = \frac{I_x}{I}$, $\cos \varphi(\vec{I}, \vec{j}) = \frac{I_y}{I}$, $\cos \varphi(\vec{I}, \vec{k}) = \frac{I_z}{I}$.

Димензија: $[I] = [Ft] = MLT^{-1} \rightarrow \frac{kgm}{s} = Ns$.

- Ако на појмину делује кон. сила $\vec{F} = const.$, онда је $\boxed{\vec{I} = \vec{F}(t - t_0)}$

- Када $\vec{F} = \vec{F}(t)$, онда резултат импулса $\int \vec{F} dt$

- Када $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$, онда је одређен векторне $\vec{r}$ не кретање и
пројекције импулса на осе

- Ако у интервалу (t_0, t) делује систем сила $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$:

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i}; \quad \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \vec{F}_i dt \rightarrow \boxed{\vec{I} = \sum_{i=1}^n \vec{I}_i}$$

Закључак, када делује систем сила у интервалу времена, онда је
импулс резултат једног лек. збира импулса сила
у том интервалу.

②. Поедена ограничени кал. кр. џоме. } Јоко о оујкоу кал. кр. џоме.

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} \rightarrow \boxed{\dot{\vec{k}} = \vec{F}} \quad \vec{F} - \text{перујомита клук сума!}$$

- улог џо брениу кал. кр. јекнок је перујомита клук сума

II б. 3.: Јујоме кал. кр. џоме оујомујомита је сума кук јекује на џому, у оујому и смену џе сума.

- Јујомитоме на O_{xyz} , јекује се:

$$k_x = X, k_y = Y, k_z = Z, \text{ јекује } X, Y, Z \text{ јекује сума } \vec{F} \text{ на } O_{xyz}.$$

Уз џоа оујоме: Улог џо брениу јекује кал. кр. џоме на клук кук оу кал. сума, јекнок је јекује перујомита на клук оу.

- Поедена мукса: диф. кал. кр. џоме јекнок је елементоме

$$d\vec{k} = \vec{F}dt \rightarrow \boxed{d\vec{k} = d\vec{I}} \leftarrow \text{муксу перујомита клук сума кук јекује на клук џому.}$$

Ако је џому у t_1 имаа $\vec{v}_1$, а у t_2 имаа $\vec{v}_2$, јекује се:

$$\vec{k}(t_2) - \vec{k}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \rightarrow \boxed{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{I}}!$$

Поедена ограничени кал. кр. - Јујоме кал. кр. џоме у кал. кр. мук.
јекнок је муксу перујомита клук сума у кал. кр. мук.

O_{xyz} :

$$k_x(t_2) - k_x(t_1) = I_x \rightarrow m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = I_x$$

$$k_y(t_2) - k_y(t_1) = I_y \rightarrow m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = I_y$$

$$k_z(t_2) - k_z(t_1) = I_z \rightarrow m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = I_z$$

* 3.0. кол. вр.

Ако на тачку делује систем сила $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ и онав да му је резултант $\vec{F}$ једнака нули, тј. $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, онда сега $\boxed{\vec{K} = \text{const.}}$ у том случају је и кинет. кол. вр. такође сачувана кол. вр. тачке.

$\vec{K} = \text{const.} = m\vec{V} \rightarrow \boxed{\vec{V} = \text{const.}} \rightarrow$ тачка се креће равномерно праволинијски.

Постављамо најмање 3 независне линије (к) на 3 некиједнаке осе одређене јед. векторима $\vec{P}_i$ ($i=1,2,3$). Ако су све 3 пројекције $\vec{F}$ на $\vec{P}_i$ једнаке нули ($\vec{F} \cdot \vec{P}_i = 0$) онда је и сама сила једнака нули.

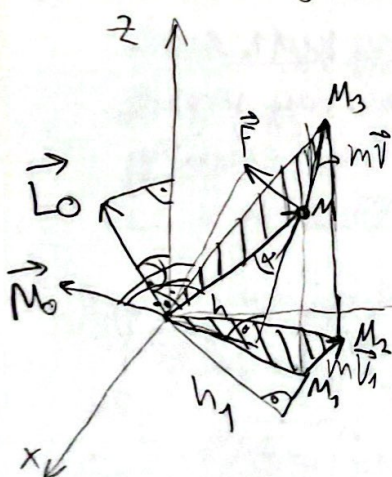
$$\vec{K} \cdot \vec{P}_i = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{K} \cdot \vec{P}_i) - \vec{K} \cdot \frac{d\vec{P}_i}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{K} \cdot \vec{P}_i) = 0 \rightarrow \vec{K} \cdot \vec{P}_i = C_i = \text{const.}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{P}_1 = 0, \vec{F} \cdot \vec{P}_2 = 0, \vec{F} \cdot \vec{P}_3 = 0 \rightarrow K_x = C_1, K_y = C_2, K_z = C_3, \text{ где су:}$$

$$\boxed{\dot{x} = C_1, \dot{y} = C_2, \dot{z} = C_3}, \text{ што одређује све 3 пројекције дринке.}$$

У случају када тачка има само једна оса одређена јед. $\vec{P}$ на коју важи $\vec{F} \cdot \vec{P} = 0$, једнака се $\vec{K} \cdot \vec{P} = C = \text{const.}$, односно $\boxed{V_P = \text{const.}}$, где је V_P пројекција дринке на осу OP .

③ Постављамо о промени кин. мом. тачке у односу на невајеринг тач. и невајер. осу



Тачка се помера M , маса m , вектор $\vec{r}$. Одједно делује сила $\vec{F}$ у односу на тачку $O \rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}}$.

Аналогно се улог класичним механичким

одређен са $\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}}$. Вектор $\vec{L}_O$

управо је на праву коју иде $\vec{r}$ и $m\vec{v}$, а оријентисан је на страну одређену се правилу $\vec{r}$ до $m\vec{v}$ ладом мањемалим покретом.

Укрупнивши $\boxed{L_O = r m v \sin \alpha}$, односно $\boxed{L_O = m v h}$, где је $\boxed{h = r \sin \alpha}$. Димензија $[L_O] = [m v h] = M L^2 T^{-1} = \frac{kg m^2}{s}$

Кин. момент се може израчунати и као:

$$\vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} (L_O)_x &= L_O \cos \alpha = m(\dot{y}z - z\dot{y}), & \alpha &\Rightarrow \vec{L}_O \text{ са } O_x \\ (L_O)_y &= L_O \cos \beta = m(z\dot{x} - x\dot{z}), & \beta &\Rightarrow \vec{L}_O \text{ са } O_y \\ (L_O)_z &= L_O \cos \gamma = m(x\dot{y} - y\dot{x}), & \gamma &= \vec{L}_O \text{ са } O_z \end{aligned}$$

Кин. мом. ипак, за неутралну осу, једнак је изразању интензивитета кинетичке енергије изражавањем кин. кр. ипак. На једној осовини на њу осу и рајонима кинетичке енергије изражавањем кинетичке енергије изражава се кроз њу једно.

За O_z :

$$|L_{Oz}| = m k h_1, \text{ где је } m k \text{ инт. изражавањем } k \text{ на } x y.$$

$$L_O = 2P_{\Delta O M_1 M_2} \rightarrow |L_{Oz}| = 2P_{\Delta O M_1 M_2}; P_{\Delta O M_1 M_2} = P_{\Delta O M M_3} \cos \psi; L_{Oz} = L_O \cos \psi$$

$L_{Oz} = (L_O)_z$, где, кин. мом. ипак, за неутр. осу једнак је изражавању L на њу осу.

$$\vec{L}_O = (L_O)_x \vec{i} + (L_O)_y \vec{j} + (L_O)_z \vec{k} = L_{Ox} \vec{i} + L_{Oy} \vec{j} + L_{Oz} \vec{k}$$

$$L_{Ox} = m(\dot{y}z - z\dot{y}), L_{Oy} = m(z\dot{x} - x\dot{z}), L_{Oz} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

* Теорема о времену

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \dot{\vec{L}}_O = \vec{r} \times m \vec{\dot{v}} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} (m \vec{v}) - \text{Улог уо времену кин. мом.}$$

$$\left[\vec{r} \times m \vec{v} = \vec{v} \times m \vec{v} = 0 \right] \text{ ипак, за неутр. осу, једнак је мом. резултате сила у осовини на њу осу.}$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O(\vec{F})}$$

Охз:

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}_{Ox} &= M_{Ox} \\ \dot{L}_{Oy} &= M_{Oy} \\ \dot{L}_{Oz} &= M_{Oz} \end{aligned} \right\}$$

- Улог уо времену кин. мом. за неутр. осу, једнак је мом. резултате сила у осовини на њу осу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m(\dot{y}z - z\dot{y})] &= \dot{y}z - z\dot{y} \\ \frac{d}{dt} [m(z\dot{x} - x\dot{z})] &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ \frac{d}{dt} [m(x\dot{y} - y\dot{x})] &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned}$$

④. Због σ збрке у мн. мн. постоје у свеном на посто. једн а огу
 једнакост а постоје по свеном једн а свеном једн а свеном
 једн а свеном $\vec{M}_0(\vec{F}) = 0$. Ово је у свеном:

- Perimeter $F = 0$

- Найденна лична Ръководителу КРЗ О

Закључак је други сума. Покази су $\vec{F}$ је укупна сила, а
покази O је укупна сила.

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{L}_0 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{L}_0 = \text{const.}}$$

Заме, $\cos \alpha$ е синусът на кт. момента и от предната
замен с $\sin \alpha$ кт. момента на кт. α и ос.

Поситате нуклеус 3 неканителотите силите се одредени јед. векторима $\vec{P}_i$ ($i=1,2,3$). Ако су све 3 таче изнутра нук. мат. нол се одредене са $\vec{P}_i$ једнаке нули, односно $\boxed{\vec{M}_0(F) \cdot \vec{P}_i = 0}$, што значи:

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0 \cdot \vec{p}_i) = 0 \rightarrow \vec{L}_0 \cdot \vec{p}_i = C_i$$

3er Oxyd lösen:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e} = M_{Ox}(\vec{F}) = 0, \quad \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{j} = M_{Oy}(\vec{F}) = 0, \quad \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{k} = M_{Oz}(\vec{F}) = 0$$

$$L_0 \cdot \vec{L} = L_{0x} = m(\dot{y}z - z\dot{y}) = \text{const.}$$

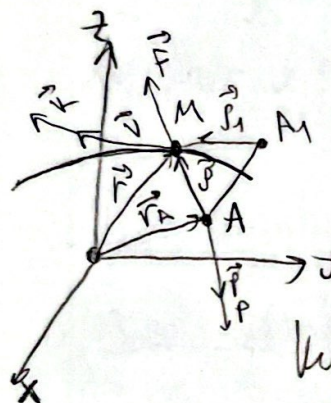
$$\vec{L}_0 \cdot \vec{j} = l_0 j = m(\dot{z}x - \dot{x}z) = \text{const.}$$

$$\vec{L}_0 - \vec{u} = L_0 \vec{z} = m(\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i}) = c \text{ const.}$$

Ако положим само една сила $\vec{F}$ през O , свързана с $\vec{r}$, то $\vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{r} = 0$,
 $\vec{L}_O \cdot \vec{r} = \text{const.}$, което е закон за сохранение кин. мом. относително теж. осъ.

$$\textcircled{O_2}: \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{k} = \vec{M}_{C_2}(\vec{F}) = 0 \rightarrow \vec{L}_O \cdot \vec{k} = L_{C_2} = m(\dot{x}y - y\dot{x}) = \text{const.}$$

(5) Поставља се питање: каква је укупна сила у односу на покретачки осак и осак



Поставља се питање: каква је укупна сила у односу на покретачки осак и осак. Његова је резултанта $\vec{F}$. Његова је укупна сила $\vec{F}$ у односу на O , одређена са $\vec{r}_A$. Његова је M у односу на O одређена са $\vec{r}$, а у односу на покретачки осак A са $\vec{P}$, на A_1 са $\vec{P}_1$.

Укупна сила M у односу на A : $\vec{L}_A = \vec{P} \times m\vec{V}$

$$\vec{P} = \vec{r} - \vec{r}_A, \vec{P}_1 = \vec{A_1A} + \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L}_A = \vec{L}_O - \vec{r}_A \times \vec{K} \\ \vec{L}_{A_1} = \vec{P}_1 \times m\vec{V} = \vec{L}_A + \vec{A_1A} \times \vec{K} \end{cases}$$

Поставља се питање: каква је укупна сила у односу на покретачки осак A :

$$\vec{L}_A = \vec{P} \times m\vec{V} + \vec{P} \times \frac{d}{dt}(m\vec{V}), \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{V} \times m\vec{V} = 0, \vec{P} \times m\vec{a} = \vec{P} \times \vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

$$\vec{L}_A + \vec{V}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A(\vec{F}), \text{ где је } \vec{V}_A = \vec{r}_A \times \vec{\omega} \text{ друкча осак } A.$$

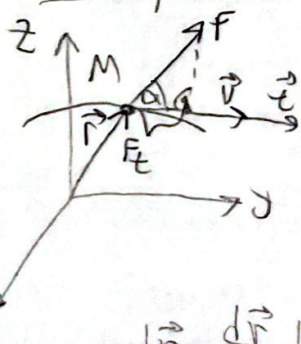
Ова једнака се може на покретачки осак A довести $\vec{V}_A \times \vec{K} = 0$.

$$\text{Осак } A_P, \text{ одређена са } \vec{P}: \frac{d}{dt}(\vec{L}_A \cdot \vec{P}) - \vec{L}_A \cdot \vec{\dot{P}} + (\vec{V}_A \times \vec{K}) \cdot \vec{P} = \vec{M}_A \cdot \vec{P}$$

(6) Елементарни и укупни рад силе

* Елементарни

Рад силе $\vec{F}$ на елементарном померању $d\vec{r}$ јесте, ел. рад δA једнак је скаларном производу $\vec{F}$ и $d\vec{r}$. $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$



$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} \Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \vec{V} dt \Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot d\vec{I}$$

Ел. рад силе једнак је ск. производу ел. интензитета и друкче померања на коју делује сила.

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \vec{e} ds \Rightarrow \delta A = \vec{F} \cdot \vec{e} ds, \delta A = F \cos \alpha ds \Rightarrow \delta A = F_e ds$$

$$\text{Јако ми је } \delta A \text{ зависи од } \alpha \begin{cases} \alpha \in [0, 90^\circ], & A > 0 \\ \alpha = 90^\circ, & A = 0 \\ \alpha \in [90^\circ, 180^\circ], & A < 0 \end{cases}$$

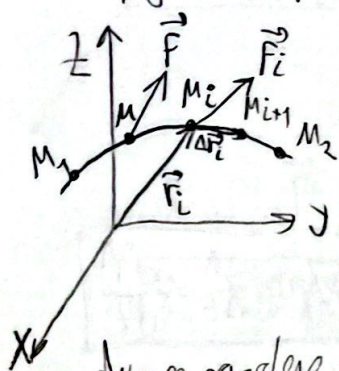
$$\text{Јединица: } [\delta A] = [F_e ds] = ML^2T^{-2} \rightarrow [1] = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Oxaz:

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \rightarrow \boxed{dA = Xdx + Ydy + Zdz}$$

* Упутни рад

- Изразити рад силе $\vec{F}$ при покривању површине $\vec{S}$ упутном



Делујуће су M_1 до M_2 где се на n делова и добија се
укупна линија.

Упутни рад дејства $\vec{F}$ од M_1 до M_2 : $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$, када $n \rightarrow \infty, \Delta r \rightarrow 0$

$$A_{M_1 M_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{или} \quad \boxed{A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt}$$

Ако се одреде упутни упутни вектор, тога:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{M_1}^{M_2} F_t ds = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha(\vec{F}, \vec{v}) ds$$

За Oxaz:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) dt$$

- Ја да рад зависи само од
почетне и крајње тачке
а не и путања кроз коју се померају.
 $Xdx + Ydy + Zdz \rightarrow$ потп. грф.

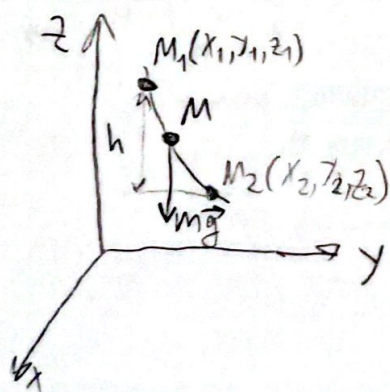
7. Рад резултанте силе

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \rightarrow \boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i}$$

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{r} \rightarrow \boxed{A_{M_1 M_2} = \sum_{i=1}^n A_i}$$

Дакле, рад резултанте силе једнак је збиру рада сваке
компоненте силе.

8. Рад тежине



Потенцијална је $G = mg$ и усмерена је вертикално-поштоје.

Oxaz: $X=0, Y=0, Z=-mg$

$$A_{M_1 M_2}(\vec{mg}) = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) \rightarrow \boxed{A_{M_1 M_2}(\vec{mg}) = \pm mgh}$$

где је $h = |z_1 - z_2|$ висина покривања.

$$A_{M_1 M_2}(\vec{mg}) > 0, z_1 > z_2 \oplus$$

$$A_{M_1 M_2}(\vec{mg}) < 0, z_1 < z_2 \ominus$$

Други начин изражава у Охт

$$\vec{F} = -mg\vec{k}, \quad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \rightarrow A_{M_1, M_2}(mg) = -mg \int_{M_1}^{M_2} dz = mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

Још смо видели због сави са којима и дефинише потенцијал енергије, што значи да је потенцијал конзервативна сила.

9. Сила и енергија

Сила и енергија су повезане јер сила доводи до промене енергије.

Брзина сила: $P_{sr} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$

Лим. вр. снагу, када $\Delta t \rightarrow 0$, добија се сила: $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$

Дакле, сила и енергија су повезане јер сила доводи до промене енергије и потенцијал енергије доводи до промене снаге.

Димензија: $[P] = [FV] = ML^2T^{-3} \rightarrow W = \frac{J}{s}, \quad 1kW = 1000W$ у јединицама

$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \phi (\vec{F}, \vec{v}) = F_t v_t$

F_t, v_t - тангентне компоненте.

F_t - сила у смеру $\rightarrow F_t \uparrow \rightarrow v_t \uparrow$

Када су $\vec{F}$ и $\vec{v}$ колинеарни и иста смера $\rightarrow P = Fv$

Охт: $P = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}$

$P = \frac{dA}{dt} \rightarrow A_{M_1, M_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$

10. Кинетичка енергија и снага. Понета и пренишана кин. ен. и снага.

Кин. ен. и снага једноставно се дефинишу јер снага доводи до промене енергије.

$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad [E_k] = ML^2T^{-2} \rightarrow W = \frac{J}{s}$

Понета и пренишана

$m\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$m\vec{v}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$

$[mvdv = d(\frac{1}{2}mv^2)]$

$d(\frac{1}{2}mv^2) = dA$

$dE_k = dA$

- диференцијал кин. ен. и снага једноставно се дефинишу!

- Интеграл од M_1 до $M_2 \rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow$

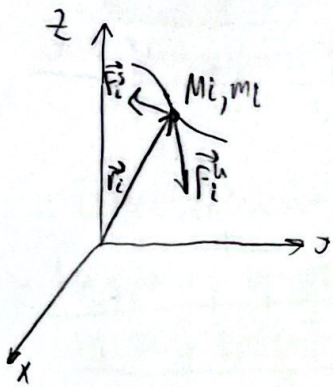
$\rightarrow E_{k2} - E_{k1} = A_{M_1, M_2}$ - пренишана кин. ен. и снага једноставно се дефинишу!

1. $E_k \uparrow$, ако је $A > 0$ ($v_2 > v_1$)

2. $E_k \downarrow$, ако је $A < 0$ ($v_2 < v_1$)

3. $E_k = 0$, ако је $A = 0$ ($v_2 = v_1$)

11. Диф. 3-те кривоа мат. система



Точка M_i , маса m_i , ќе се у Oxz под дејството на некаква сила. Се апсолутне силе и резултат лежа на M_i , могу се заменити соодветен со. сила муго се рез. $\vec{F}_i^s$ и соодветен ун. сила муго се рез. $\vec{F}_i^u$.

$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u$, на n мат. система соодветен n диф. 3 на и се се почитува ДЗ кривоа мат. силе.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u / \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

$$m_i \ddot{x}_i = X_i^s + X_i^u \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i^s + Y_i^u \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i^s + Z_i^u \rightarrow \text{ДЗ кр. мат. силе, у Дел. кер.}$$

За n система соодветен 3н ДЗ групата сега. Навога не мора резултат ДЗ интегрирање, лек се користе апсолутне апсолутне соодветен мат. силе.

12. Количина кривоа мат. силе. и кривоа маса

Вел. кр. материјална система једнока се вел. резултат вел. кр. силе соодветен система. $\vec{K} = \sum_{i=1}^n \vec{k}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$

1^o Количина кр. мат. силе. једнока се управува може соодветен и дрине центар маса.

Доказ 1^o:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_i) = \frac{d}{dt}(M \vec{r}_c) = M \frac{d\vec{r}_c}{dt} \rightarrow \vec{K} = M \vec{v}_c, \text{ где } M - \text{маса мат. силе, а } \vec{r}_c - \text{вел. додекага центар маса, } \vec{v}_c - \text{дрине центар маса.}$$

Охзз:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow \boxed{K_x = M v_{cx} = M \dot{x}_c}, \boxed{K_y = M v_{cy} = M \dot{y}_c}, \boxed{K_z = M v_{cz} = M \dot{z}_c}$$

- Ако се мат. силе. кривоа маса, вел. кр. се одредува ет. изразом:

$$\vec{K} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \int_{(M)} \vec{v} dm$$

M - маса кр. маса
 $\vec{v}$ - дрине ет. маса маса

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_m, \vec{K} = \int_m \vec{v}_c dm + \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm, \vec{K} = M \vec{v}_c$$

13) Теорема о главном кр. м.р. $\vec{K}$ и о результирующем кр. м.р. $\vec{K}_R$ мат. сис.

* Теорема

Т: Угловое движение кр. м.р. мат. сис. равнодействующим вектору системы внешних сил, действующим на мат. сис.

Доказ:

ПО Т. О КР. ЦЕНТРА МАССЫ ЯВЛЯЕТСЯ ГЛАВНЫМ ВЕКТОР СИЛ СИЛ $\vec{F}_R$

$$\vec{K} = M \vec{v}_c / \frac{d}{dt}, \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = M \vec{a}_c, \quad \boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R}$$

Охyz: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\boxed{\frac{dk_x}{dt} = K_R^x} \quad \boxed{\frac{dk_y}{dt} = K_R^y} \quad \boxed{\frac{dk_z}{dt} = K_R^z}$$

- Угол $\frac{d\vec{K}}{dt}$ можно использовать по оси угл. системы $\vec{j}, \vec{i}, \vec{z}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{z}$)

$$\vec{K} = k_j \vec{j} + k_i \vec{i} + k_z \vec{z} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K}} \quad \left| \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{dk_j}{dt} \vec{j} + \frac{dk_i}{dt} \vec{i} + \frac{dk_z}{dt} \vec{z} \right.$$

↳ результирующий угол $\vec{K}$ по $\vec{j}, \vec{i}, \vec{z}$

- Также угл. кр. сис. можно использовать для неизменяемой мат. сис. тогда же $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ ($\vec{\Omega}$ - угл. др. $\vec{\omega}$).

Т: Приращение кр. м.р. мат. сис. в конечном интервале времени равнодействующим вектору импульса сил $\vec{I}$ сис. в этом интервале времени, относительно импульса начальной кр. м.р. сис.

Доказ:

$$d\vec{K} = \vec{F}_R^s dt, \quad \left[d\vec{I}_R^s = \vec{F}_R^s dt \right] / \int$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R^s dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{I}_R^s = \vec{I}_R^s = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^s dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} d\vec{I}_i^s = \sum_{i=1}^n \vec{I}_i^s \Rightarrow \boxed{\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \Delta \vec{K} = \vec{I}_R^s}$$

$$\text{Охyz: } K_{2x} - K_{1x} = \Delta K_x = \sum_{i=1}^n I_{ix}^s$$

$$K_{2y} - K_{1y} = \Delta K_y = \sum_{i=1}^n I_{iy}^s$$

$$K_{2z} - K_{1z} = \Delta K_z = \sum_{i=1}^n I_{iz}^s$$

* Закон о центра.

- Ако је $\vec{F}_R = 0$, онда је век. вр. мат. сис. констатан

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R = 0 \rightarrow \boxed{\vec{K} = M\vec{V}_C = \vec{K}(t_0) = M\vec{V}_C(t_0) = \text{const.}}$$

- $\vec{V}_C = \vec{V}_C(t_0) = \text{const.} \rightarrow$ центар маса C урне се равномерно праволинијски!

- Ако је центр. урне. сис. сима на неку осу дефинисан, онда је урне. вр. на тој осу констатан.

$$\vec{F}_R \neq 0, \vec{X}_R = 0 = \frac{dK_x}{dt} \rightarrow \boxed{K_x = \text{const.}}, K_x = Mv_{Cx} = M\dot{x}_C \rightarrow \boxed{\dot{x}_C = \text{const.}}$$

у слич. сл., када је $\vec{V}_C$ у тој дефинисан, тода је центар маса C констатан!

$$\vec{V}_C = \vec{V}_C(t_0) = 0 \rightarrow \frac{d\vec{r}_C}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{r}_C = \text{const.}}$$

$$\dot{x}_C = \dot{x}_C(t_0) = 0 \rightarrow \frac{dx_C}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{x_C = \text{const.}}$$

14. Понесена о централној срединној маси. Закон о централној ср. маси.

* Понесена

Т: Центар маса C материјалног система урне се као мат. тачка
може дефинисати централној маси M система на коју дефинисане
савне вектор. сис. сима система.

$$2: \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^u$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (M \vec{r}_C) = M \vec{a}_C, \text{ где је } M \text{ маса}$$

мат. сис., $\vec{r}_C$ - век. пол. центра маса, $\vec{a}_C$ - век. убрзања C .

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^u = 0 \rightarrow \boxed{M \vec{a}_C = \vec{F}_R^s}, \vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^s$$

О хтз:

$$\boxed{M \ddot{x}_C = \sum_{i=1}^n X_i^s = X_R^s}$$

$$\boxed{M \ddot{y}_C = \sum_{i=1}^n Y_i^s = Y_R^s}$$

$$\boxed{M \ddot{z}_C = \sum_{i=1}^n Z_i^s = Z_R^s}$$

- Убрзања сис. не могу утицати на кретање центра маса мат. сис.!

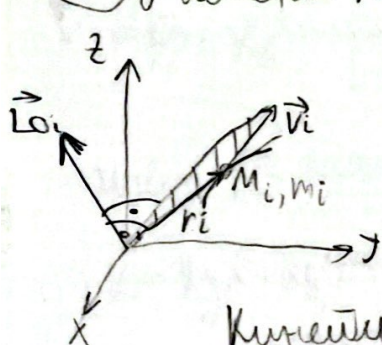
* Закон

Ако је $\vec{F}_R^s = 0$, центар маса ће се покретати равномерно и равномерно

$$M\vec{a}_C = \vec{F}_R^s = 0, \vec{a}_C = 0, \boxed{\vec{V}_C = \text{const.}}, \text{ а ако је } \vec{V}_C = \vec{V}_C(t_0) = 0 \rightarrow \boxed{\vec{r}_C = \text{const.}}$$

Ако $\vec{F}_R^s \neq 0$, али $\vec{x}_R = 0 \rightarrow M\ddot{x}_C = \dot{x}_R = 0 \rightarrow \ddot{x}_C = 0, \boxed{V_{xC} = \text{const.}}$, а
ако је $\vec{V}_{xC} = \vec{V}_{xC}(t_0) = 0$, свега $\boxed{x_C = \text{const.}}$

15. Моменту кинетичке енергије мат. система



$$\boxed{\vec{L}_{O_i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

Кинетички мат. $\vec{L}_O$ мат. система у односу на тачку O једнак је
векторском збиру кин. мат. слух тачкека обележене мат.
сис. у односу на исту тачку.

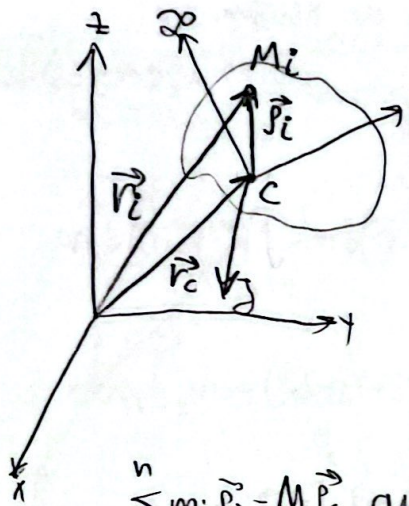
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ m_i \dot{x}_i & m_i \dot{y}_i & m_i \dot{z}_i \end{vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} L_{Ox} &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \\ L_{Oy} &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) \\ L_{Oz} &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \end{aligned}$$

16. Веза између мат. кин. ер. мат. сис. у односу на постој. тачку и средњег маса

Т: При променама кинетичке енергије мат. сис., кин. мат. $\vec{L}_O$ одређен је збиром
кин. мат. мат. тачке, које једнаке маси система и смештене у
центру маса C , у односу на исту тачку кин. мат. $\vec{L}_C$ мат. сис.
у односу на C .

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{K} + \vec{L}_C}$$

- При променама мат. сис. одражава се кинетичка енергија у односу на
постојано тачку кин. сис. са кин. тачке у центру маса.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ir}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_c + \vec{\rho}_i) \times (\vec{v}_c + \vec{v}_{ir}) \\ &= \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{ir} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_c + \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_{ir} \\ &= \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \frac{d}{dt} (M \vec{\rho}_c) + M \vec{\rho}_c \times \vec{v}_c + \vec{L}_{cr} \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i = M \vec{\rho}_c$, am je peramburim uenostoj uenosti C jezna 0 ($\vec{\rho}_c = 0$) Ua je:

$\vec{r}_c \times \frac{d}{dt} (M \vec{\rho}_c) = 0$, $M \vec{\rho}_c \times \vec{v}_c = 0$, Ua ce uenost chzu Ha:

$$\boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{L}_{cr}}, \quad \boxed{\vec{L}_{cr} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_{ir}} \quad \begin{array}{l} \text{um. nam. nam. uz. y ogmoy} \\ \text{Ha C (peramburim um. nam.)} \end{array}$$

Ua je $\vec{k} = M \vec{v}_c \rightarrow \boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{k} + \vec{L}_{cr}}$

Oprz:

$$\boxed{L_{0x} = (\vec{r}_c \times \vec{k}) \cdot \vec{e}_x + L_{crx}}, \quad \boxed{L_{0y} = (\vec{r}_c \times \vec{k}) \cdot \vec{e}_y + L_{cry}}, \quad \boxed{L_{0z} = (\vec{r}_c \times \vec{k}) \cdot \vec{e}_z + L_{crz}}$$

17. Momentum kar. vr. kuglasta tela

$$d\vec{k} = \vec{v} dm$$

$$\vec{L}_0 = \int_m \vec{r} \times d\vec{k} = \int_m \vec{r} \times \vec{v} dm$$

$$[\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{\rho}]$$

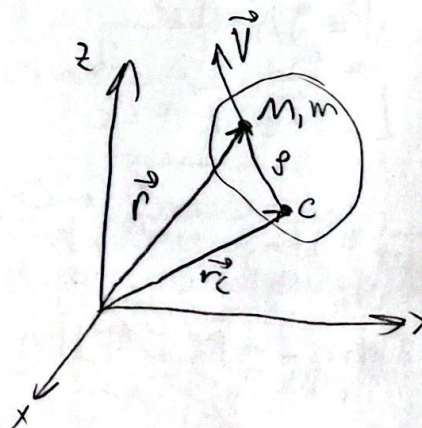
$$\vec{L}_0 = \int_m \vec{r}_c \times \vec{v} dm + \int_m \vec{\rho} \times \vec{v} dm$$

$$\int_m \vec{\rho} \times \vec{v} dm$$

$$[\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_m = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}]$$

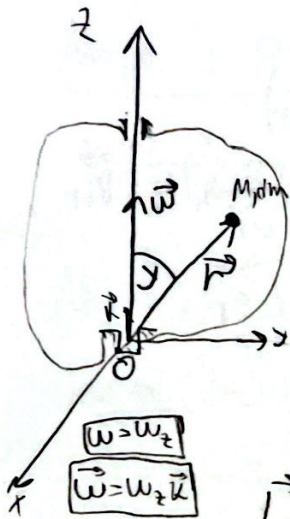
$$\int_m \vec{\rho} \times \vec{v}_c dm + \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \vec{L}_c$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{k} + \vec{L}_c}$$



$$\oplus \int_m \vec{\rho} \times \vec{v}_c dm = m \vec{\rho}_c \times \vec{v}_c = 0$$

18. Mon. val. kr. za odpružaj ogy kuglasta tiera voze se odpruženo Heitor. ocl
 $r\vec{\omega} = r\omega_z \cos \theta = z \cdot \omega_z$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{v}_m = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L}_O = \int_m \vec{r} \times \vec{v}_m dm = \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int_m \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) dm - \int_m \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) dm$$

$$= \int_m \vec{\omega} r^2 dm - \int_m \vec{r} z \omega_z dm = \vec{\omega} \int_m r^2 dm - \int_m (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) z \omega_z dm$$

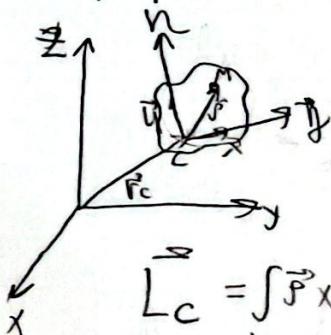
$$= \omega_z \cdot \vec{k} \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm - \omega_z \int_m z x \vec{i} dm - \omega_z \int_m z y \vec{j} dm - \omega_z \int_m z^2 \vec{k} dm$$

$$\vec{L}_O = \omega_z \int_m (x^2 + y^2) dm - \omega_z \cdot \vec{i} \int_m x z dm - \omega_z \cdot \vec{j} \int_m y z dm$$

$$L_{Oz} = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = \omega_z \int_m (x^2 + y^2) dm = \boxed{\omega_z J_{Oz}}$$

19. Mon. val. kr. kuglasta tiera voze krun polno kretnice

- Jm polno kr. cle ωcukce se vrtu y polnima āparacim Heitor. polno Oxt.



$$\vec{p} = z\vec{i} + \eta\vec{k}$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_c \times \vec{k} + \vec{L}_c$$

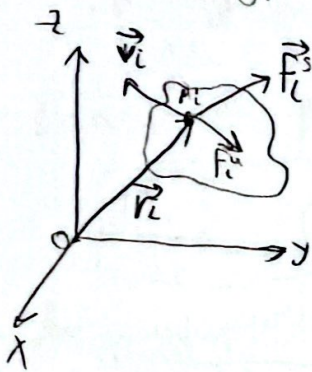
$$\vec{L}_c = \int_m \vec{p} \times (\vec{\omega} \times \vec{p}) dm, \quad \vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \omega_z (\vec{v}) \begin{pmatrix} \vec{k} \parallel \vec{v} \\ \omega_z = \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_c = \int_m \vec{\omega} (\vec{p} \cdot \vec{p}) dm - \int_m \vec{p} (\vec{p} \cdot \vec{\omega}) dm = \int_m \vec{\omega} p^2 dm = \vec{\omega} \int_m p^2 dm$$

$$\vec{L}_c = \omega_z \vec{v} \int_m (z^2 + \eta^2) dm = J_{cz}, \quad \boxed{L_{cz} = \omega_z J_{cz} \vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_c \times \vec{k} + J_{cz} \omega_z \vec{v}}$$

20. Преглед на графички мем. кол. вр. у односу на кривот. Вал и осу.
Зачеи о суржању.



$$\vec{L}_{0i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_i^s) + \vec{M}_O(\vec{F}_i^u)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{dL_{oi}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i^3) + \sum_{i=1}^n \cancel{\vec{M}_O(\vec{F}_i^4)} \quad \text{①}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_{oi} \right) = \vec{M}_o^g \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \vec{L}_o = \vec{M}_o^g}$$

- Уведбо времењу инерционих моментих мени. сис. у односу на немоћеност њих
једнак је инерционих моменту сис. сиса на мени њих.

За ове две релације:

$$\left[\frac{d}{dt} L_{Ox} = M_{Ox}^S \right], \left[\frac{d}{dt} L_{Oy} = M_{Oy}^S \right], \left[\frac{d}{dt} L_{Oz} = M_{Oz}^S \right]$$

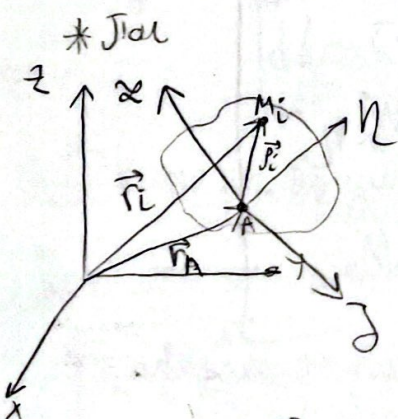
* Zehen

Ако је главни момент са сва једног нуми ($\bar{M}_0^s$), тога је кин. мом. пот. сис. сличан са кин. пот. сис.

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i^s) = \vec{M}_0^s = 0, \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \vec{M}_0^s = 0 \rightarrow \boxed{L_0 = \text{const.}}$$

$$\vec{M}_0^S \neq 0, \vec{M}_{0x}^S = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} L_{0x} = M_{0x}^S = 0 \rightarrow L_{0x} = \text{const.}$$

21. Теорема о границах криволинейного интеграла по поверхности



$$\left[\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{p}_i \right], \left[\vec{L}_A = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i \right], \vec{p}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_A$$

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \vec{v}_i \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

$$[m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^g + \vec{F}_i^c]$$

$$\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \vec{r}_T \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times \vec{f}_i + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times \vec{f}_i^0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_A \times \vec{k} + \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times \vec{F}_i = -\vec{v}_A \times \vec{k} + \vec{M}_A^g$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A^s$$

↳ Урлог ӯо ҳамаи кин. мам. ӯ ағраи на А, вожа се ҳама дурӯи $\vec{v}_A$.

$$\vec{K} = M \vec{v}_C \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} + M(\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AC}) = \vec{M}_A^s$$

- Вожа ғ $\vec{\omega}_A = 0$, ҳаҷа $A = O \rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s$

- Вожа $\vec{\omega}_A \neq 0$, амм $\vec{v}_C = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^s$

- Вожа $A = C \rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^s$

* Оса

$$\left[\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_A + \vec{v}_A \times \vec{K} = \vec{M}_A^s \right], \text{ Ҳаҷа } \frac{d\vec{L}_A}{dt} \text{ - ҳамаи урлог } \vec{L}_A \text{ ӯ}$$

ағраи на ӯаҷаи кин. мам. АЗНЗ, $\vec{\Omega}$ - ҳамаи ӯаҷаи ӯаҷаи ӯаҷаи АЗНЗ, а $\vec{K} = M \vec{v}_C$. Моҷаи са $\vec{L}$ ҳаҷа се ӯаҷаи $\vec{L}_A$ на са АЗ:

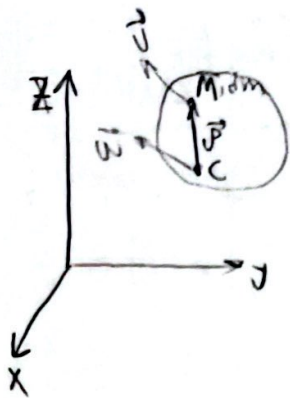
$$\left[\frac{d\vec{L}_A}{dt} + (\vec{\Omega} \times \vec{L}_A) \cdot \vec{\lambda} + (\vec{v}_A \times M \vec{v}_C) \cdot \vec{\lambda} = M_{A\vec{\lambda}}^s \right], M_{A\vec{\lambda}}^s = \sum_{i=1}^n M_A (\vec{f}_i^s)_{\vec{\lambda}}$$

Моҷаи са ӯаҷаи ӯаҷаи са $\vec{\mu}$ а $\vec{v}$ ҳаҷа се ӯаҷаи са ӯаҷаи са:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ L_{Ax} & L_{Ay} & L_{Az} \end{vmatrix} + \vec{v}_A \times M \vec{v}_C = \vec{M}_A^s \quad / \cdot \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{v}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1. \frac{dL_{A\vec{\lambda}}}{dt} + (\Omega_y L_{A\vec{\mu}} - \Omega_z L_{A\vec{\nu}}) + (\vec{v}_A \times M \vec{v}_C) \cdot \vec{\lambda} = M_{A\vec{\lambda}}^s \\ 2. \frac{dL_{A\vec{\mu}}}{dt} + (\Omega_z L_{A\vec{\lambda}} - \Omega_x L_{A\vec{\nu}}) + (\vec{v}_A \times M \vec{v}_C) \cdot \vec{\mu} = M_{A\vec{\mu}}^s \\ 3. \frac{dL_{A\vec{\nu}}}{dt} + (\Omega_x L_{A\vec{\mu}} - \Omega_y L_{A\vec{\lambda}}) + (\vec{v}_A \times M \vec{v}_C) \cdot \vec{\nu} = M_{A\vec{\nu}}^s \end{array} \right]$$

↳ ғ-на ағраи ӯаҷаи кин. мам. на са ӯаҷаи кин. мам. ӯ ағраи са ӯаҷаи са



$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_m, \quad \vec{v}_m = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m v_c^2 dm + \frac{1}{2} \int_m 2 \vec{v}_c \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm + \frac{1}{2} \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm$$

$$E_k = \frac{v_c^2}{2} \int_m dm + \vec{v}_c \cdot (\vec{\omega} \times \int_m \vec{r} dm) + \int_m \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r})^2}{2} dm$$

$$E_k = \frac{m v_c^2}{2} + E_{k, \text{rel.}}; \quad E_{k, \text{rel.}} = \int_m \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r})^2}{2} dm$$

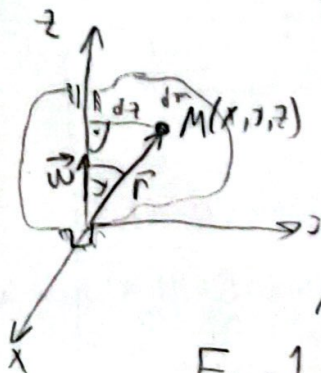
КЕНИГОВА ТЕОРЕМА:

! Кин. эн. вращающегося тела относительно фиксированной точки равно сумме кин. эн. поступательного движения тела и кин. эн. вращения тела относительно центра масс.

* Периодическое

- Поступательное движение центра масс M_i относительно C есть 0, ($\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = 0$), т.е. $E_{k, \text{rel.}} = 0$, тогда: $E_k = \frac{m v_c^2}{2} \rightarrow M$ - масса в. тела
 $\rightarrow v_c$ - скорость центра масс

(23) E_k тела вые се отпе от нелюв. осе.



$$\vec{v} = \vec{v}_m = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$$

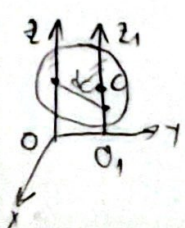
$$E_k = \frac{1}{2} \int_m (\omega_z \vec{k} \times \vec{r})^2 dm = \frac{1}{2} \int_m \omega_z^2 (\vec{k} \times \vec{r})^2 dm$$

$$\|(\vec{k} \times \vec{r})\|^2 = |\vec{k}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \angle(\vec{k}, \vec{r}) = r \sin \varphi = dz^2 //$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m \omega_z^2 dz^2 dm \Rightarrow E_k = \frac{J_{Oz} \omega_z^2}{2}; \quad J_{Oz} = \int_m dz^2 dm$$

J_{Oz} - м. м. м. в. н. на O_z

* Кинетика

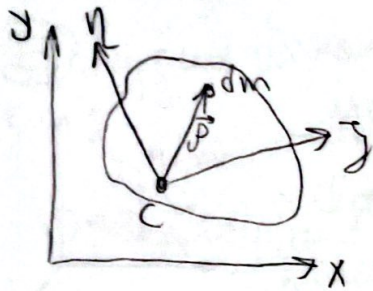


$$J_{Oz} = J_{Oz1} + m d_c^2$$

$$E_k = \frac{(J_{Oz1} + m d_c^2) \omega_z^2}{2}$$

$$E_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_{Oz1} \omega_z^2}{2}$$

24. E_k урунугт нэвчлэг бүхий галснхны үр.



$$\vec{r} = \zeta \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu}; \quad \zeta = \text{const.}, \quad \eta = \text{const.}$$

$$E_k = \frac{m}{2} v_c^2 + \frac{1}{2} \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \rightarrow \text{KEHHHГ}$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{V}$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{V} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ \zeta & \eta & 0 \end{vmatrix} = (-\omega_z(\eta \vec{\lambda} - \zeta \vec{\mu}))^2$$

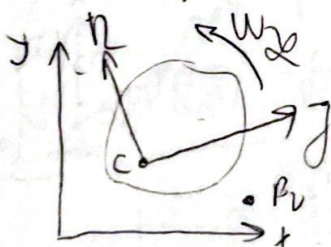
$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega_z^2 (\eta \vec{\lambda} - \zeta \vec{\mu})(\eta \vec{\lambda} - \zeta \vec{\mu}); \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} = 1 \quad \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} = 0 \\ \vec{\mu} \cdot \vec{\mu} = 1 \end{array} \right\}$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega_z^2 (\eta^2 + \zeta^2)$$

$$\hookrightarrow E_k = \frac{m}{2} v_c^2 + \frac{1}{2} \int_m \omega_z^2 (\eta^2 + \zeta^2) dm = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{\omega_z^2}{2} \int_m (\eta^2 + \zeta^2) dm$$

$$E_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_{Cz} \omega_z^2}{2}; \quad J_{Cz} = \int_m (\eta^2 + \zeta^2) dm$$

* Яича дүрхнэ

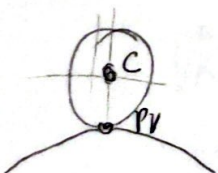


$$v_c = \overline{P_v C} \cdot \omega$$

$$E_k = \frac{m}{2} (\overline{P_v C} \cdot \omega)^2 + \frac{J_{Cz} \cdot \omega^2}{2}$$

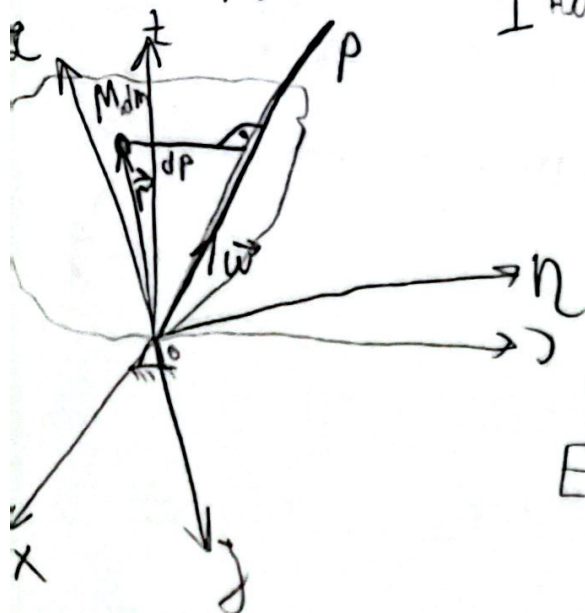
$$E_k = \frac{\omega^2}{2} (\overline{P_v C}^2 \cdot m + J_{Cz}) \rightarrow \boxed{J_{P_v z} = J_{Cz} + m \overline{P_v C}^2}$$

* Кэнтр. гүснэ



$$\overline{P_v C} = \text{const} \rightarrow \boxed{J_{P_v z} = \text{const.}}$$

25. Ек кинетика енергија војзе се одрже око некоег. тачке



I начин

$\vec{\omega}$ - вектор уг. брзине

O_P - укрестачка оса одржавања

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad \text{н. поворне } O_P$$

$$\|(\vec{\omega} \times \vec{r})\|^2 = (\|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{r}))^2 = \omega^2 dp^2 //$$

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \int_m r^2 dm \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} I_{OP} \omega^2}$$

II начин

$$\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \int_m \vec{r} \times \vec{v} dm \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O}$$

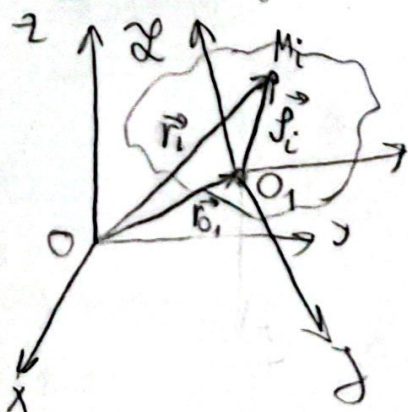
Изразивајући на $O_\eta \eta \zeta$:

$$E_k = \frac{1}{2} (\omega_\eta L_{O\eta} + \omega_\zeta L_{O\zeta} + \omega_x L_{Ox})$$

$$\left[E_k = \frac{1}{2} I_{O\eta} \omega_\eta^2 + \frac{1}{2} I_{O\zeta} \omega_\zeta^2 + \frac{1}{2} I_{Ox} \omega_x^2 - I_{\eta\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta - I_{\eta x} \omega_\eta \omega_x - I_{\zeta x} \omega_\zeta \omega_x \right]$$

Ако се оса Ox уклања са уг. осе поврнујуће O_P : $\boxed{E_k = \frac{1}{2} I_{Ox} \omega_x^2}$

26. Ек кинетика енергија брзог померања тачке



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{O1} + \vec{r}_i \quad \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O1} + \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_m + \vec{v}_i$$

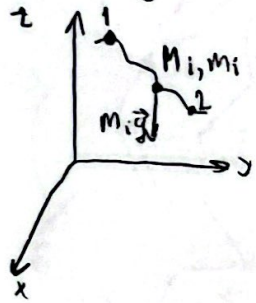
$$E_k = \frac{1}{2} M v_{O1}^2 + \frac{1}{2} \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm$$

$$// \frac{1}{2} \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm = \frac{1}{2} \int_m \vec{v}_m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \frac{\vec{\omega}}{2} \int_m \vec{r} \times \vec{v}_m dm$$

$$= \frac{\vec{\omega}}{2} \left(\int_m \vec{r} \times \vec{v}_m dm - \int_m \vec{r} \times \vec{v}_{O1} dm \right) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_{O1} //$$

Штотвор E_k годнаго одлук: $E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0 \rightarrow$ КЕХННГОВА Т.

(27) Try and write num. suc.



- Ако се мат. см. намери у таву Земљине теже, онда на
случају тежине M_i , може m_i рећије $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$. а.

Elementarni pogled na $\vec{F}_i$ je $m_i \vec{g} \cdot d\vec{r}_i$, a ukupni rad se dobije odzbrojenjem svih n članova:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot d\vec{r}_i, \quad // z_i = -m_i g, \quad x_i = y_i = 0 //$$

$$[\vec{g} \cdot d\vec{r}_i = -g \vec{k} \cdot d\vec{z}_i \vec{k} = -g dz_i]$$

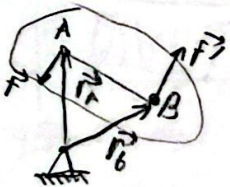
$$\delta A = -g \sum_{i=1}^n m_i dz_i = -Mg dz_c \rightarrow \text{grav. center}$$

Уштејатинузи на волуменот температур дојдува се кончини одим

$$A = -M_g \int_{z_{c1}}^{z_{c2}} dz_c = -M_g (z_{c2} - z_{c1}) = M_g (z_{c1} - z_{c2})$$

- Jeg er voksen og min søster
 er 6 år gammel

28. Log cōp̄ia cūm



$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$$

$$\oint A(\vec{M}) = \oint A(\vec{F}) + \oint A(\vec{F}') = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{F}' \cdot d\vec{r}_B = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A - \vec{F} \cdot d\vec{r}_B$$

$$dA(\vec{M}) = F^2 (d\vec{r}_A - d\vec{r}_B)$$

$$// \vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \rightarrow d\vec{r}_A = \vec{V}_A dt //$$

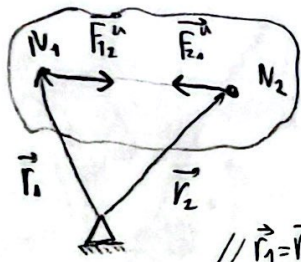
$$\sigma_A(\vec{M}) = \vec{F}(\vec{V}_A - \vec{V}_B) dt$$

$$// \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_A^B = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times B\vec{A}, \quad \vec{V}_A - \vec{V}_B = \vec{\omega} \times B\vec{A} //$$

$$dA(\vec{M}) = \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{BA}) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{BA} \times \vec{F}) dt$$

$$\oint A(\vec{M}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M} dt$$

29) Погруженные сис. взаимодействуют между собой



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\delta A^u = \delta A^u(\vec{F}_{12}^u) + \delta A^u(\vec{F}_{21}^u)$$

$$\delta A^u = \vec{F}_{12}^u \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}^u \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}^u \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}^u \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$// \vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{N}_2 \vec{N}_1, \vec{N}_2 \vec{N}_1 = \vec{N}_2 \vec{N}_1 \vec{r}_0, d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d(\vec{N}_2 \vec{N}_1 \vec{r}_0) = d(\vec{N}_2 \vec{N}_1) \vec{r}_0 + \vec{N}_2 \vec{N}_1 d\vec{r}_0 //$$

$$\delta A^u = \vec{F}_{12}^u (\vec{r}_0 d(\vec{N}_2 \vec{N}_1) + \vec{N}_2 \vec{N}_1 d\vec{r}_0)$$

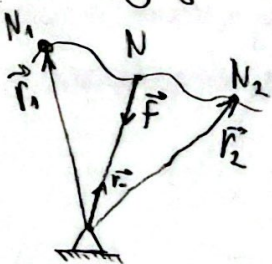
$$// \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 = 1/d, 2\vec{r}_0 d\vec{r}_0 = 0, \vec{r}_0 d\vec{r}_0 = 0; \vec{r}_0 \perp d\vec{r}_0; \vec{F}_{12}^u \perp d\vec{r}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12}^u d\vec{r}_0 = 0} //$$

$$\boxed{\delta A^u = \vec{F}_{12}^u \vec{r}_0 d(\vec{N}_2 \vec{N}_1)}$$

1) Если сис. взаимодействуют: $\vec{N}_2 \vec{N}_1 = \text{const. } d(\vec{N}_2 \vec{N}_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta A^u = 0}$

2) Если сис. не взаимодействуют: $\vec{N}_2 \vec{N}_1 \neq \text{const. } d(\vec{N}_2 \vec{N}_1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{\delta A^u \neq 0}$

30) Погруженные сис.



$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} d\vec{r}$$

$$A(\vec{F}) = \int_{N_1}^{N_2} \vec{F} d\vec{r}, \vec{F} = F(r) \cdot \vec{r}_0 = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$A(\vec{F}) = \int_{N_1}^{N_2} F(r) \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} \rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2/d$$

$$2\vec{r} d\vec{r} = 2r dr \Rightarrow \boxed{\vec{r} d\vec{r} = r dr}$$

$$\boxed{A(\vec{F}) = \int_{N_1}^{N_2} F(r) r dr}$$

* Для сис. взаимодействующих и не рег

$$F_c = C \cdot \Delta l$$

$$\Delta l = l - l_0$$

$$\boxed{\vec{F}_c = -C(r - r_0) \frac{\vec{r}}{r}}$$

$$A(\vec{F}_c) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} C(r - r_0) dr$$

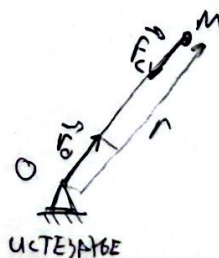
$$// dr = dr - dr_0 = d(r - r_0) //$$

$$A(\vec{F}_c) = -C \int_{r_1}^{r_2} (r - r_0) d(r - r_0)$$

$$A(\vec{F}_c) = -C \left. \frac{(r - r_0)^2}{2} \right|_{r_1}^{r_2}$$

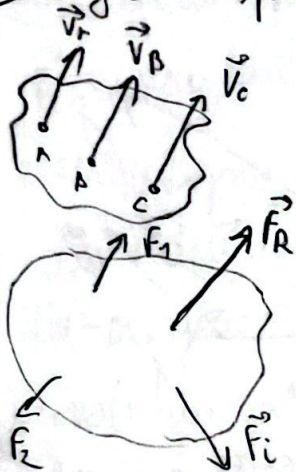
$$A(\vec{F}_c) = \frac{C}{2} ((r_1 - r_0)^2 - (r_2 - r_0)^2)$$

$$\boxed{A(\vec{F}_c) = \frac{C}{2} (\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2)} \rightarrow \text{рег сис. взаимодействуют}$$



УСТАНОВКА

1. Век смел при шлох. Кресту и сло



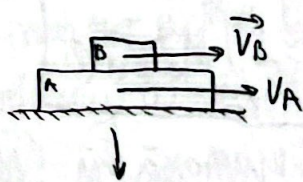
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}, \quad d\vec{r}_A = d\vec{r}_B = d\vec{r}_C = d\vec{r}$$

$$\oint A_i^s = \oint F_i dr^s$$

$$\Delta A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) d\vec{r}$$

$$dA^s = \overset{(-1)}{F_R^s} d\vec{r} \rightarrow A^s = \int F_R^s d\vec{r}$$

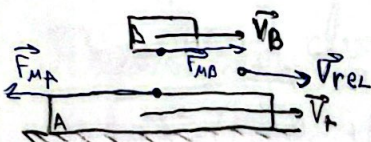
32) Родите ђења живота



$$\vec{V}_A > \vec{V}_B \dots (1), \quad \vec{F}_{MA} = -\vec{F}_{MB} \dots (2)$$

$$\oint A^q = \oint A(\vec{F}_{MA}) + \oint A(\vec{F}_{MB}) = \vec{F}_{MA} d\vec{r}_A + \vec{F}_{MB} d\vec{r}_B = \vec{F}_{MA} (d\vec{r}_A - d\vec{r}_B)$$

$$\sigma A^u = \int_{\mu}^{\infty} (V_A - V_B) dt$$



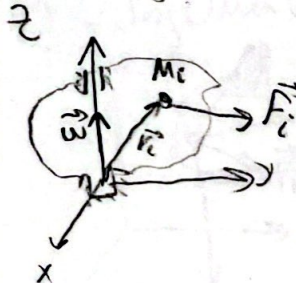
$$\sigma A'' = -f_m v_{rel} \cdot dt < 0$$

$$\vec{V}_{RL} = \vec{V}_A - \vec{V}_B > 0$$

$$\angle(\vec{F}_u, \vec{v}_{rel}) = 90^\circ$$

$$\vec{F}_u \cdot \vec{v}_{rel} = F_M v_{rel} \cos 180^\circ = -F_M v_{rel}$$

33. Родина при одржавајуће дела око нејасноће се



$$\vec{\omega} = \psi \vec{K}, (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n)$$

$$dA^s = \vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i \vec{v}_i dt; \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$d\vec{A}_i = \vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{F}_i \times \vec{r}_i) dt \quad ; \quad \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

$$dA_i = \vec{\omega} \times \vec{M}_0(\vec{F}_i) dt = e \vec{k} \cdot \vec{M}_0(\vec{F}_i) dt$$

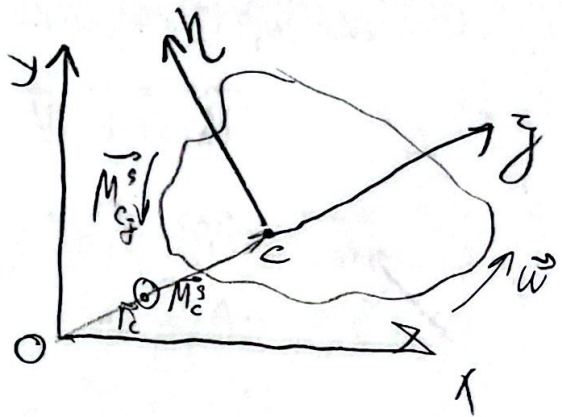
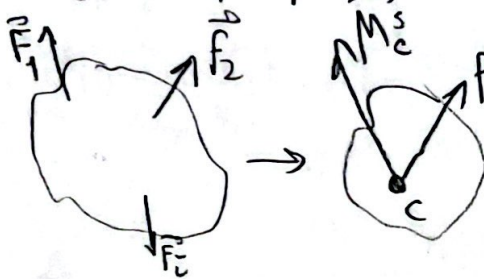
$$// \vec{k} \cdot \vec{M}_0(\vec{F}_i) = M_{0z}(\vec{F}_i); \quad d\ell = \frac{d\ell}{dt} dt = d\ell //$$

$$\delta A_{Si} = M \vec{c}_i (\vec{F}_i) d\ell$$

$$\underline{\delta A_i} = \sum_{j=1}^n \delta A_j = \left(\sum_{j=1}^n M_{cj}(\vec{r}_i) \right) d\ell \rightarrow \underline{\delta A^s = M_{cz} d\ell}$$

$$A^S = \int_{p_1}^{p_2} M_0 z dp$$

34. Regime eines freien polaren Systems unter



$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i ; M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i)$$

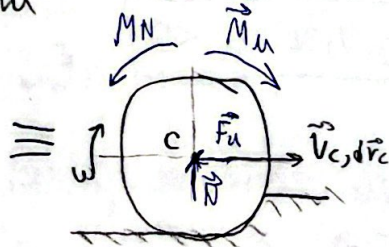
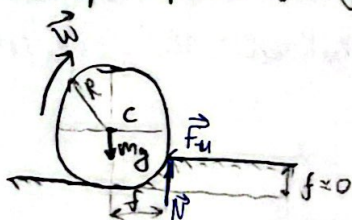
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R, \vec{M}_C)$$

$$\delta A^S = \sum_{i=1}^n \delta A_i^S = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \Rightarrow \delta A^S = \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + \vec{M}_C \cdot \vec{\omega} \cdot dt ; \vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z ; M_C^S = M_{Cz}^S \vec{e}_z$$

$$\delta A^S = \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + M_{Cz}^S \omega_z dt \Rightarrow \boxed{\delta A^S = \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + M_{Cz}^S d\varphi}$$

$$A^S = \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{r}_C + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{Cz}^S d\varphi$$

35. Regime eines Systems eines freien Körpers unter der Wirkung der Kräfte des Kontaktes im Hertz'schen Kontaktbereich



m, R
f-hen auf der Kontaktpunkte

I Regime $\vec{N}$ $\propto (N \cdot d\vec{r}_C)$

$$\delta A(\vec{N}) = \vec{N} \cdot d\vec{r}_C + \vec{M}_C(\vec{N}) \cdot \vec{\omega} \cdot dt ; M_C(\vec{N}) = M_N = N \cdot f, \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\delta A(\vec{N}) = -M_N \dot{\varphi} dt = -N \cdot f \cdot d\varphi \Rightarrow \boxed{A(\vec{N}) = -\int_1^2 N \cdot f \cdot d\varphi}$$

II Regime $\vec{F}_u$

$$\delta A(\vec{F}_u) = \vec{F}_u \cdot d\vec{r}_C + \vec{M}_C(\vec{F}_u) \cdot \vec{\omega} \cdot dt ; M_C(\vec{F}_u) = M_u = -F_u \cdot R$$

$$\delta A(\vec{F}_u) = -F_u dx_C + F_u \cdot R \frac{d\varphi}{dt} dt ; \leftarrow \dot{x}_C = R \dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{dx_C = R d\varphi}$$

$$\delta A(\vec{F}_u) = -F_u R d\varphi + F_u R d\varphi = 0$$

$$\boxed{A(\vec{F}_u) = 0}$$

38. Теорема о изменении кин. эн. мат. сис. и кинетич. энер.

Т: Приращение E_k мат. сис. на внешнем бр. интервалу равно сумме кин. эн. и ун. сис. кинетич. энергии на этот момент.

д:

- Приращение энергии о изменении E_k системы:

$$\frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = A_i = A_i^s + A_i^u, \text{ где } A_i^s \text{ — работа сил тяжести, } A_i^u \text{ — работа сил инерции:}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i2}^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i1}^2}{2} = \sum_{i=1}^n A_i^s + \sum_{i=1}^n A_i^u$$

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \sum_{i=1}^n A_i^s + \sum_{i=1}^n A_i^u$$

Аналогично можно показать, что работа сил инерции равна нулю, т.е.:

$$\Delta E_k = \sum_{i=1}^n A_i^s$$

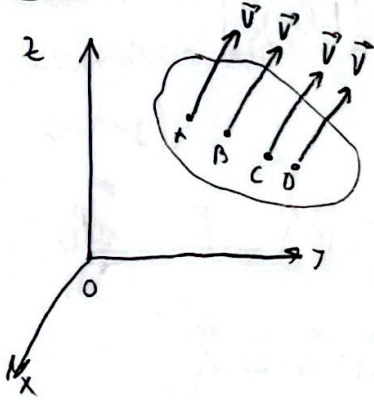
У диф. слагаемых имеем: $dE_k = \sum_{i=1}^n dA_i^s + \sum_{i=1}^n dA_i^u$

Зная, что работа силы тяжести равна нулю, имеем:

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dA_i^s}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{dA_i^u}{dt} = \sum_{i=1}^n P_i^s + \sum_{i=1}^n P_i^u = P^s + P^u$$

Аналогично можно показать, что работа сил инерции равна нулю, т.е. $A_i^u, P_i^u \approx 0$.

39. D) $\vec{\omega} = 0$ $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_D = \vec{v}$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_D = \vec{v} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}_D = \vec{a} \end{array} \right\} \frac{d\vec{k}}{dt} = m \vec{a}_c = \vec{F}_R / \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



$$\left. \begin{array}{l} m \ddot{x}_c = X_R \\ m \ddot{y}_c = Y_R \\ m \ddot{z}_c = Z_R \end{array} \right\} \text{D) уравнения}$$

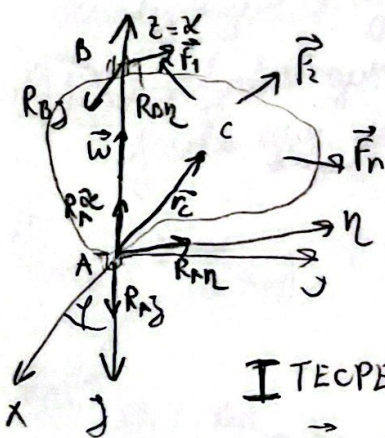
$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m \vec{v}_C ; L_C = \int \vec{r}_x (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = 0$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v}_C \times m \vec{v}_C + \vec{r}_C \times m \vec{a}_C = \vec{M}_C^S ; \quad \frac{dL_C}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{M_C^S = 0} \quad / \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$$

$$\boxed{M_C^S = 0, M_C^S \vec{e}_1, M_C^S \vec{e}_2 = 0} \Rightarrow \text{декартову систему координат}$$

40. D) $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$, $\varphi = \varphi(t) \rightarrow$ $\vec{E} = E_z \vec{v}$



$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}, \quad \varphi = \varphi(t) \rightarrow \text{з-на одружених векторів, } \vec{E} = E_z \vec{v}$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$$

$$\vec{r}_A = R_{Aj} \vec{x} + R_{A\eta} \vec{y} + R_{Az} \vec{z}$$

$$\vec{r}_B = R_{Bj} \vec{x} + R_{B\eta} \vec{y}$$

$$\text{І ТЕОРЕМА: } \frac{d\vec{k}}{dt} = m \vec{a}_c = \vec{F}_R^S \quad \text{аналізуємо}$$

$$\vec{F}_R^S = \vec{F}_1^S + \vec{F}_2^S + \dots + \vec{F}_n^S + \vec{F}_A + \vec{F}_B \Rightarrow \vec{F}_R^S = \vec{F}_R^A + \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c, \quad \vec{r}_c = \vec{AC}, \quad \vec{r}_c = j_c \vec{x} + \eta_c \vec{y} + z_c \vec{z} \quad / \quad j_c = \text{const}, \quad \eta_c = \text{const}, \quad z_c = \text{const}$$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_R^A + \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times \vec{v}_c ; \quad (\vec{a}_c = \vec{a}_{cN} + \vec{a}_{cT}) \rightarrow \vec{a}_{cT} = \vec{E} \times \vec{r}_c = \vec{E} \cdot \vec{v} \times \vec{r}_c$$

$$\vec{a}_{CN} = \vec{\omega} \times \vec{V}_C = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \quad \vec{V}_C = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{u} & \vec{v} \\ 0 & 0 & \dot{e} \\ j_c & n_c & z_c \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-\dot{e}n_c) + \vec{u}(\dot{e}z_c)$$

$$\vec{a}_{CN} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{u} & \vec{v} \\ 0 & 0 & \dot{e} \\ -\dot{e}n_c + \dot{e}z_c & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-\dot{e}^2 z_c) + \vec{u}(\dot{e}^2 n_c)$$

$$\vec{a}_{CT} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_C = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{u} & \vec{v} \\ 0 & 0 & \ddot{e} \\ j_c & n_c & z_c \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-\ddot{e}n_c) + \vec{u}(\ddot{e}z_c)$$

$$\boxed{\vec{a}_C = \vec{\lambda}(-\dot{e}^2 z_c - \ddot{e}n_c) + \vec{u}(\ddot{e}z_c + \dot{e}^2 n_c)}$$

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^a + R_{\alpha\beta}\vec{\lambda} + R_{\alpha\eta}\vec{u} + R_{\alpha z}\vec{v} + R_{\beta\gamma}\vec{\lambda} + R_{\beta\eta}\vec{u} \quad / \vec{\lambda}, \vec{u}, \vec{v}$$

$$\vec{\lambda}: m(-\dot{e}^2 z_c - \ddot{e}n_c) = F_{R\beta}^a + R_{\alpha\beta}\gamma + R_{\beta\gamma} \dots (1)$$

$$\vec{u}: m(\ddot{e}z_c + \dot{e}^2 n_c) = F_{R\eta}^a + R_{\alpha\eta} + R_{\beta\eta} \dots (2)$$

$$\vec{v}: 0 = F_{Rz}^a + R_{\alpha z} \dots (3)$$

$$\text{II THEOREMA: } \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_R^a = \vec{M}_A(\vec{F}_R^a) + \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{R}_B) \dots$$

$$\vec{AB} = h, \quad \vec{M}_A(\vec{R}_B) = \vec{AB} \times \vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{u} & \vec{v} \\ 0 & 0 & h \\ R_{B\beta} & R_{B\eta} & 0 \end{vmatrix} = \vec{\lambda}(-hR_{B\beta}) + \vec{u}(hR_{B\eta})$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_R^a) = M_{R\beta}^a \vec{\lambda} + M_{R\eta}^a \vec{u} + M_{Rz}^a \vec{v}$$

$$\vec{L}_A = \int_m \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int_m \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) dm - \int_m \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) dm =$$

$$= \int_m \omega_z \vec{v}(\vec{z}^2 + \vec{\eta}^2 + \vec{x}^2) dm - \int_m \omega_x (\vec{z}\vec{\lambda} + \vec{\eta}\vec{u} + \vec{x}\vec{v}) dm$$

$$= \dot{e} \vec{v} \underbrace{\int_m (\vec{z}^2 + \vec{\eta}^2) dm}_{J_{Az}} - \dot{e} \vec{\lambda} \underbrace{\int_m z x dm}_{J_{z\alpha}} - \dot{e} \vec{u} \underbrace{\int_m \eta x dm}_{J_{n\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{L}_A = J_{Az} \dot{e} \vec{v} - J_{z\alpha} \dot{e} \vec{\lambda} - J_{n\alpha} \dot{e} \vec{u}} \quad ; J_{Az}, J_{z\alpha}, J_{n\alpha} = \text{const.} !$$

Σε μια σφαιρική ηρεμότητα όσον αφορά κέντρο μάζας. σφαιρικό, γεγονός είναι
 μεμονωμένα υπολογίζουμε $J_x \ddot{\alpha}$ & $J_y \ddot{\beta}$, αλλά και στην φ-για γενικά (με δεδομένο
 const).

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = J_A \ddot{\alpha} \vec{V} - J_{Jx} (\ddot{\alpha} \vec{\lambda} + \dot{\alpha} \dot{\vec{\lambda}}) - J_{Jy} (\ddot{\beta} \vec{u} + \dot{\beta} \dot{\vec{u}})$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda} = \dot{\alpha} (\vec{V} \times \vec{\lambda}) = \vec{\mu} \dot{\alpha}, \quad \dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \vec{u} = \dot{\beta} (\vec{V} \times \vec{u}) = -\vec{\lambda} \dot{\beta}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = J_A \ddot{\alpha} \vec{V} - J_{Jx} \ddot{\alpha} \vec{\lambda} - J_{Jx} \dot{\alpha}^2 \vec{\mu} - J_{Jy} \ddot{\beta} \vec{u} + J_{Jy} \dot{\beta}^2 \vec{\lambda} \quad / \alpha, \beta, \vec{V}$$

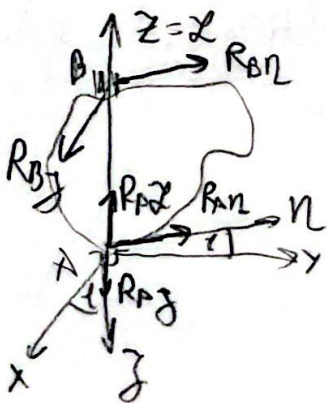
$$\vec{\lambda}: -J_{Jx} \dot{\alpha} + J_{Jy} \dot{\beta} = M_A^a \dot{\alpha} - h R_{B\eta} \dots (4)$$

$$\vec{u}: -J_{Jx} \dot{\beta} - J_{Jy} \dot{\alpha} = M_A^a \dot{\beta} + h R_{B\zeta} \dots (5)$$

$$\vec{V}: J_A \ddot{\alpha} = M_A^a \ddot{\alpha} \dots (6)$$

Οι εξισώσεις για τις σφαιρικές κινήσεις σε μια ζεγονιότητα
 κινείται κέντρο (ε=ε(t)), χρησιμοποιώντας (6) υπολογίζουμε DJ σφαιρική
κίνηση στο κέντρο. σε. Οπότε με 5 γ-και 4 γ-με κινείται κέντρο. σε.
 σφαιρική κίνηση σε σφαιρική κίνηση κέντρο.

41. Οδηγούμε τις εξισώσεις για τις σφαιρικές κινήσεις σε σφαιρική κίνηση κέντρο.
 Υπολογίζουμε τις εξισώσεις κίνησης.



$$(1) \dots -m \ddot{\eta}_c - m \dot{\eta}_c^2 \zeta_c = F_{R\zeta}^a + R_{A\zeta} + R_{B\zeta}$$

$$(2) \dots m \ddot{\zeta}_c - m \dot{\zeta}_c^2 \eta_c = F_{R\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta}$$

$$(3) \dots 0 = F_{R\alpha}^a + R_{A\alpha}$$

$$(4) \dots J_{Jx} \ddot{\alpha} + J_{Jy} \ddot{\beta} = M_A^a \dot{\alpha} - h R_{B\eta}$$

$$(5) \dots -J_{Jx} \dot{\beta} - J_{Jy} \dot{\alpha} = M_A^a \dot{\beta} + h R_{B\zeta}$$

$$(6) \dots J_A \ddot{\alpha} = M_A^a \ddot{\alpha}$$

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{ST} + \vec{R}_A^D$$

$$\left. \begin{aligned} R_{Aj} &= R_{Aj}^{ST} + R_{Aj}^D \\ R_{An} &= R_{An}^{ST} + R_{An}^D \\ R_{Ax} &= R_{Ax}^{ST} + R_{Ax}^D \end{aligned} \right\} (*)$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_{Bj} &= R_{Bj}^{ST} + R_{Bj}^D \\ R_{Bn} &= R_{Bn}^{ST} + R_{Bn}^D \end{aligned} \right.$$

Системе реакције леза Сисење и њен мигалоси. Асистеју грег грегиле
системе свеситице сиса и огрегиле се!

$$\dot{e} = \ddot{e} = 0$$

$$(*) \rightarrow (1) \dots 0 = F_R^a j + R_{Aj}^{ST} + R_{Bj}^{ST}$$

$$(*) \rightarrow (2) \dots 0 = F_R^a n + R_{An}^{ST} + R_{Bn}^{ST}$$

$$(*) \rightarrow (3) \dots 0 = F_R^a x + R_{Ax}^{ST}$$

$$(*) \rightarrow (4) \dots 0 = M_{Aj} - h R_{Bn}^{ST}$$

$$(*) \rightarrow (5) \dots 0 = M_{An} + h R_{Bj}^{ST}$$

- огрегиле се $\vec{R}_A^{ST}, \vec{R}_B^{ST}$

Усистемен свеситице сиса и свеситице реакције леза грегиле се
систе ј-на свеситице свеситице грегиле грегиле сисе:

$$\dot{e} \neq 0, \ddot{e} \neq 0$$

$$F_R^a = M_A^a = 0$$

$$-m\ddot{e}n_c - m\ddot{e}^2 j_c = R_{Aj}^D + R_{Bj}^D$$

$$-m\ddot{e}^2 n_c + m\ddot{e} j_c = R_{An}^D + R_{Bn}^D$$

$$0 = R_{Ax}^D$$

$$-\ddot{e} j_{xx} + \ddot{e}^2 j_{nx} = -h R_{Bn}^D$$

$$-\ddot{e} j_{nx} - \ddot{e}^2 j_{xx} = h R_{Bj}^D$$

$$\vec{R}_A^D, \vec{R}_B^D$$

*Усисте грегиле свеситице

-Систеједно је огрегиле свеситице те свеситице грегиле свеситице сисе 0.

$$R_{Aj}^D = R_{An}^D = R_{Ax}^D = R_{Bn}^D = R_{Bj}^D = 0, \text{ грегиле се 2 свеситице ј-на}$$

$$\left. \begin{aligned} -m\ddot{e}n_c - m\ddot{e}^2 j_c &= 0 \\ \ddot{e} j_c - \ddot{e}^2 n_c &= 0 \end{aligned} \right\} j_c, n_c \text{ ре огрегиле}$$

$$\left. \begin{aligned} -\ddot{e} j_{xx} + \ddot{e}^2 j_{nx} &= 0 \\ -\ddot{e} j_{nx} - \ddot{e}^2 j_{xx} &= 0 \end{aligned} \right\} j_{xx}, j_{nx} \text{ ?}$$

Ode gen. smetena su jednačina i formule od kuzle.

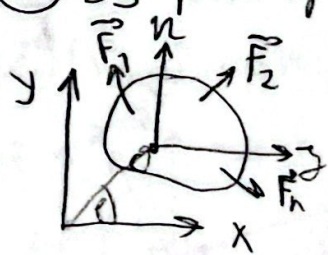
$$\begin{bmatrix} \ddot{e}^2 & \ddot{e}^2 \\ \ddot{e}^2 & -\ddot{e}^2 \end{bmatrix} = -\ddot{e}^4 - \ddot{e}^2 \neq 0$$

U ovoj smeteni ce biti da centar mase otpada A_z ($J_c = J_{c0} = 0$).

U drugoj smeteni sledi da centrifugalni moment inercije mora biti 0.

$J_z = J_{zz} = 0$, $\bar{A}_z$ u ovoj odnosi sa inercije itera.

42. D) polni kretanje



koordinatne varijable: (x_c, y_c, z_c)

3 smetena a. kretanja

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n), \quad m \vec{a}_c = \vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$z_c = 0 = \text{const.}, \quad \vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$$

$$m \ddot{x}_c = X_R^s \dots (1)$$

$$m \ddot{y}_c = Y_R^s \dots (2)$$

$$m \ddot{z}_c = Z_R^s \dots (3)$$

$$\frac{dL_{cx}}{dt} = 0 = M_{cx}^s \dots (4)$$

$$\frac{dL_{cy}}{dt} = 0 = M_{cy}^s \dots (5)$$

$$\frac{dL_{cz}}{dt} = \frac{d}{dt} (J_{cz} \dot{e}) = M_{cz}^s \rightarrow J_{cz} \ddot{e} = M_{cz}^s \dots (6)$$

Drugi kretanje:

$$(1) \dots m a_T = m v_c = F_{RT}^s$$

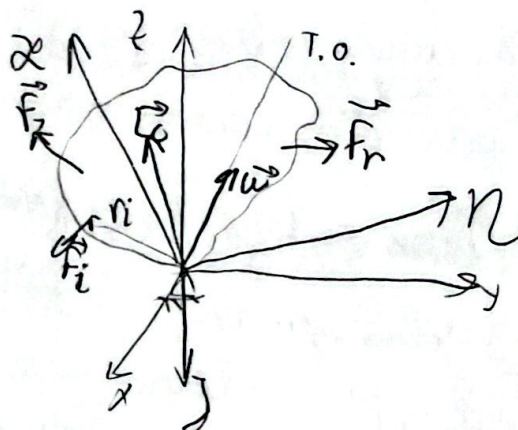
$$(2) \dots m a_N = m \frac{v_c^2}{r_k} = F_{RN}^s$$

$$(6) \dots J_{cz} \ddot{e} = M_{cz}^s$$

43. D) сферичен център маса

D) център маса на кинематички връзки, действащи се въртешно въртене ω с ъгловата ъгълна скорост ω спрямо център маса O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^S = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$



Всички сферични центри на маса са кинематички връзки, действащи се въртешно въртене ω с ъгловата ъгълна скорост ω спрямо център маса O .

Момент на кинематички връзки, действащи се въртешно въртене ω е:

$$\vec{L}_O = L_{Oz} \vec{z} + L_{O\eta} \vec{\eta} + L_{Ox} \vec{x}$$

Вектор ъгловата ъгълна скорост $\omega = \omega_z \vec{z} + \omega_\eta \vec{\eta} + \omega_x \vec{x}$, тогава

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dots = \frac{dL_{Oz}}{dt} \vec{z} + \frac{dL_{O\eta}}{dt} \vec{\eta} + \frac{dL_{Ox}}{dt} \vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

По аналогия с 3-те компоненти ω се получават 3 уравнения за център маса O :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} + (\omega_\eta L_{Ox} - \omega_x L_{O\eta}) = M_{Oz}^S$$

$$\frac{dL_{O\eta}}{dt} + (\omega_z L_{Ox} - \omega_x L_{Oz}) = M_{O\eta}^S$$

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} + (\omega_z L_{O\eta} - \omega_\eta L_{Oz}) = M_{Ox}^S$$

Ако се въртешно въртене ω се въртешно въртене ω с ъгловата ъгълна скорост ω спрямо център маса O , тогава се получават 3 уравнения за център маса O :

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_\eta - J_x) \omega_\eta \omega_x = M_{Oz}^S$$

$$J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = M_{O\eta}^S$$

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_\eta - J_z) \omega_\eta \omega_z = M_{Ox}^S$$

које се појављују Општина димитрије ј-не обрћеном Кругом и тако
по Николу. Помиње. Револуционарније ј-на годишњу се:

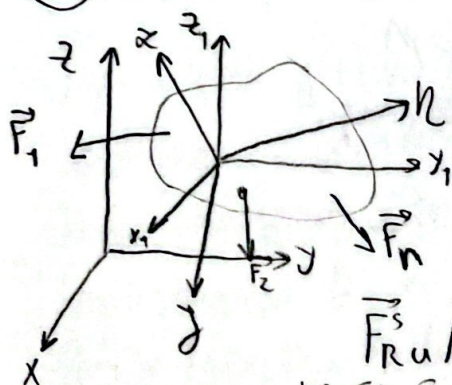
$$w_j = w_j(e), w_n = w_n(e), w_x = w_x(e)$$

Нормативни почватне Операции кин. 1-не интерпретираат и из почватне
почватне услови, кога се годатна работи према Оперативни услови:

$$\psi = \psi(t) \quad \theta = \theta(t) \quad \ell = \ell(t)$$

↳ ПРЕЦЕССИЯ ↳ НАТЯЖИНА ↳ СОПР. РОТ.

(44) D) Wenn zwei Funktionen ähnliche Kreistre



D) анилати притока вода могу се добити из
 мерење от притоку средњимата моста и мерење
 о времену кин. момента уз остоку на цевотер
 моста, њу.: $m \vec{a}_c = \vec{F}_R$; $d \vec{L}_c = \vec{M}_c$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_R^s ; \quad \frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c^s$$

$\vec{F}_{Ru} \vec{M}_c^s$ су једнаки интерактивним моментима ст. сила,
реципрокно. Из тихих ф-ца се добијају 6 ста. ДД:

$$m \ddot{x}_c = X_R^s$$

$$m \ddot{y}_c = Y_E$$

$$m \ddot{z}_c = 7 \frac{5}{R}$$

$$\frac{dL_{CZ}}{dt} + (w_n L_{CZ} - w_z L_{Cn}) = M_{CZ}$$

$$\frac{dL_{on}}{dt} + (w_x L_{cy} - w_y L_{cx}) = M_{cn}^s$$

$$\frac{dL_{cz}}{dt} + (\omega_z L_{cz} - \omega_n L_{cz}) = M_c^s z$$

Земљотрес јертеј система ј-на, уз кривама Оуералх км. ј-на, и
уз почнаме бачејте уибе, додија се 6 кмачихе ј-на оиуиет кетел:

$$x_c = x_c(t), \quad j_c = j_c(t), \quad z_c = z_c(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \ell = \ell(t)$$

У асимпт. суму нуле могуће ревалориз. диф. f -на, лех само у
стел. сумарелне.

45) Термодинамические уравнения.

$g_j, j=1, 2, \dots, s$ s -доп. обобщенных координат

Универс. мех. систем и n точек, при этом из лев. части, n уравнений

и $3n-k$ уравнений.

k -доп. лев.

$$f = f(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad [S = 3n - k]$$

$$x_i = x_i(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$$

$$y_i = y_i(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$$

$$z_i = z_i(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$$

$$r_i = r_i(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$$

- Обобщенные лев.:

$$X_i = X_i(g_j), \quad Y_i = Y_i(g_j), \quad Z_i = Z_i(g_j), \quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(g_j) \quad \begin{matrix} j=1, 2, \dots, s \\ i=1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

* Термодинамические уравнения

$g_1(t), g_2(t), g_3(t), \dots, g_s(t) \rightarrow j$ -на координатах системы точек тер. коор.

- Обобщенные лев.

$$\dot{g}_j = \frac{dg_j}{dt}, \quad j=1, 2, \dots, s$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(g_1, g_2, \dots, g_s, t), \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dg_1} \dot{g}_1 + \frac{d\vec{r}_i}{dg_2} \dot{g}_2 + \dots + \frac{d\vec{r}_i}{dg_s} \dot{g}_s + \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{d\vec{r}_i}{dg_j} \dot{g}_j + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad i=1, 2, \dots, n$$

- Обобщенные лев. (функция $f(t)$)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(g_1, g_2, \dots, g_s)$$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{d\vec{r}_i}{dg_j} \dot{g}_j \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dg_j} = \frac{d\vec{r}_i}{dg_j}, \quad j=1, 2, \dots, s$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dg_j} = \frac{d}{dg_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$$

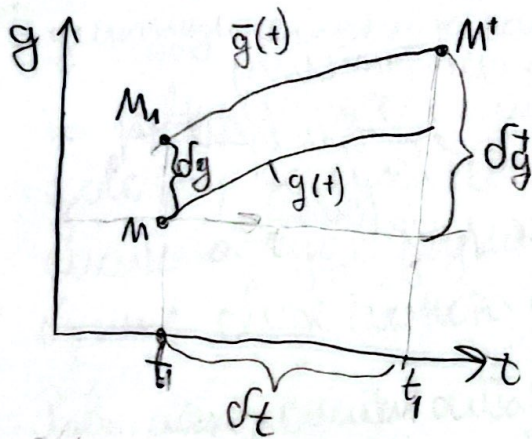
$$\frac{d\vec{v}_i}{dg_j} = \frac{d}{dg_j} \left(\sum_{k=1}^s \frac{d\vec{r}_i}{dg_k} \dot{g}_k + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dg_j} = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_j dg_1} \dot{g}_1 + \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_j dg_2} \dot{g}_2 + \dots + \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_j dg_s} \dot{g}_s + \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt dg_j} \dot{g}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dg_j} \right) = \frac{d\vec{v}_i}{dg_j}$$

$$\left[\frac{d\vec{v}_i}{dg_j} = \frac{d}{dg_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dg_j} \right) \right] \rightarrow \text{ленив. компьютерная модель}$$

$$\frac{d}{dt}() \text{ и } \frac{d}{dg_j}()$$

46. Вариација координата



У тзв. варијационој кинематици
са ситијом, интервал се изабере
форме ϕ -иначе разликовање једе и
лине координата.

$$\bar{g}(t) = g(t) + \epsilon \eta(t)$$

ϵ - једнако мали лимит
до одређеног
 $\eta(t)$ - ДФ, познате 1. глуп, 0.0

Величина $\epsilon \eta(t)$ мора се варијационој функцији и означава се са
 δg .

$$\delta g = \bar{g}(t) - g(t) = \epsilon \eta(t)$$

Примећује се да $g(t)$ и $\bar{g}(t)$ може се посматрати као варијационој
функцији ϕ -је. Резултат је варијација одговарајућег одређеног $\bar{g}(t)$.

При изабеној варијационој функцији време t не постоје иста, да се све
варијације ϕ -ја познате изабене или сигурне. Варијације
 ϕ -је времене тако се означавају или варијације.

$\delta t = 0 \Rightarrow$ сигурне

$$\delta g = \bar{g}(t) - g(t) = \frac{d}{dt}(\delta g) \rightarrow \left[\delta \left(\frac{d}{dt} g \right) = \frac{d}{dt}(\delta g) \right] \rightarrow \text{комутација}$$

Асимптотичка варијација: $\delta g = dg + \dot{g} \delta t$; $\delta^* \left(\frac{d}{dt} g \right) \neq \frac{d}{dt}(\delta^* g)$

$\frac{d}{dt} \Delta g = \delta \dot{g} + \dot{g} \Delta t + g \frac{d}{dt} \Delta t$, па тако асимптотичка варијација је:

$$\Delta \dot{g}_i = \delta \dot{g}_i + \dot{g}_i \Delta t$$

47. Варијационо-матрични систем

После варијација, варијација и матрица и ситија варијација

* Ситија варијација су елементи варијација које се одговарају
неке варијација матрица. - $\Delta \vec{r}$

* матрица варијација су варијација елементи варијација матрица варијација
варијација у једнаком матрица варијација варијација

- варијација варијација, а варијација варијација варијација варијација

- варијација (варијација и варијација) су варијација варијација - $\Delta \vec{r}$

* Закривљених површина и површина гравитационог поља
у функцији параметра.

- Координатни систем (које одређује сматрамо сматра)
- Све скаларне функције, где су све ϕ -је од t , а неке је функција
- координатне се координатне лине се "загубљују"
- одређено са $d\vec{r}$, dx, dy, dz

• Скалар. лине $f(x, y, z) = 0$

• Вектор. лине $f(x, y, z) = 0$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}, \quad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

• Скалар. лине $f(x, y, z) = 0$

$$f(x+dx, y+dy, z+dz) = 0$$

$$f(x+dx, y+dy, z+dz) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad , \quad \text{grad } f \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad \text{grad } f \cdot d\vec{r} = 0, \quad \text{grad } f = \lambda \vec{n}, \quad \vec{n} - \text{вектор нормале}$$

- У овом случају, вектор површина је у свакој тачки. Јер он је једнак са вектором нормале

• Вектор. лине

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad M(x, y, z) = 0, \quad \bar{M}(x+dx, y+dy, z+dz)$$

$$f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$(\text{grad } f \cdot d\vec{r} = 0), \quad M(x, y, z), \quad M_1(x+dx, y+dy, z+dz)$$

$$f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$(\text{grad } f \cdot d\vec{r} = - \frac{\partial f}{\partial t} dt \neq 0)$$

- Загубљено да вектор површина није у свакој тачки. Јер он је једнак са вектором нормале

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(g_1, g_2, \dots, g_s)$$

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial g_1} dg_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial g_2} dg_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial g_s} dg_s$$

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial g_j} dg_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

50. Лагранжеве принципи виртуалних померања. Овде је још савијено.

У динамици се може разнотеже савијати и на материјалној систему.

За равнотежу система материјалног померања неопходно је и довољно да суна сила сила буде дејствују на свакој материјалној систему буде једнака нули и да у свакој материјалној померици силе сваког система буде једнаке нули. $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i = 0$

- Равнотеже - систем се налази у стању. 

• Закон Невтоновог померања:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^a + \vec{N}_i = 0 \text{ / } \delta \vec{r}_i$$

$$\vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i + \vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0 \text{ / } \delta \vec{r}_i, \quad \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \text{ јер је } \vec{N}_i \perp \delta \vec{r}_i$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i = 0 \right] \rightarrow \text{закон виртуалног померања (Невтоновог померања)}$$

• Закон гравитације:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^a + \vec{N}_i \neq 0, \quad \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i + \vec{N}_i \delta \vec{r}_i > 0 \text{ / } \delta \vec{r}_i, \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{N}_i \delta \vec{r}_i > 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i > 0, \quad \vec{F}_i^a + \vec{N}_i = 0 \text{ (} i=1, 2, \dots, n \text{)}.$$

↳ материјални систем је у равнотежи

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j^a \delta q_j = 0, \text{ } s\text{-тиј систем са } s \text{ материјалних система.}$$

$$(\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \delta \vec{r}_i = 0)$$

$$\delta A = Q_1^a \delta q_1 + Q_2^a \delta q_2 + \dots + Q_s^a \delta q_s = 0$$

$$[Q_1^a = Q_2^a = \dots = Q_s^a = 0, \quad Q_j = 0 \text{ (} j=1, 2, \dots, s \text{)}]$$

48. Рад сил на виртуалном померању

Рад сил на вирт. померању изражава скаларни производ вектора силе и вектора виртуалног померања датих система на коју дејствује сила, њ.

$$\delta A = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \delta A(\vec{F}_i) = F_i \delta s_i \cos(\delta \vec{r}_i, \vec{F}_i), \text{ где је } \delta s_i = |\delta \vec{r}_i|$$

* Идеалне силе

- Све које раде у смеру постојећег дејства без дејства нум, поклапају се идеалне силе. $\delta A_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

* Реалне силе

$$\vec{F}_{w_i} = \vec{F}_{N_i} + \vec{F}_{\mu_i}; \delta A_i = \vec{F}_{w_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_{N_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F}_{\mu_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_{\mu_i} \cdot \delta \vec{r}_i \neq 0$$

49. Термичке силе

Узастопљених се сила између ем. тела које су и тем. кор:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t), (i=1, 2, \dots, n)$$

где је број тем. кор. $N=3n-k$ једнак броју тем. кор. узастопљених дејства хемичких тела, а m је укупан број карактеристика, једнак броју независних укупних и преносних, њ. $m=N+\alpha$

$$\text{Укупан рад сил: } \delta A_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \text{ њ. } \boxed{\delta A = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j}$$

$$\text{где је } Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), (j=1, 2, \dots, m).$$

Q_j је термичких карактеристика q_j и генерално поклапају се термичке силе.

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m, \text{ а ако су виртуална померања једнака нули } (\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_m = 0) \Rightarrow \boxed{Q_j = \frac{\delta A}{\delta q_j}}$$

- Ако је q_j мт. померање, Q_j је сила

- Ако је q_j углова кор, Q_j је момент.

52. Кин. ен. мат. сис. у конформном возбудувању

- Понатаму се мат. сис. ег и воопшто, со с вкљ. а. Сис. ег је
 одговорно дефинирано како што е, нештоа. лем. кин. ен. мат. сис. ег
 је:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dg_1} \dot{g}_1 + \dots + \frac{d\vec{r}_i}{dg_s} \dot{g}_s + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{d\vec{r}_i}{dg_1} \dot{g}_1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{d\vec{r}_i}{dg_s} \dot{g}_s \right)^2 + \dots + 2 \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_1 dg_{22}} \dot{g}_1 \cdot \dot{g}_2 + \dots + 2 \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_1 dg_s} \dot{g}_1 \cdot \dot{g}_s + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_1 dt} \dot{g}_1 + \dots + 2 \frac{d^2 \vec{r}_i}{dg_s dt} \dot{g}_s + \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 \right]$$

- Укажувајќи на коеф. a_{jk} , b_k и c_0 :

$$a_{jk} = a_{kj} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dg_j} \frac{d\vec{r}_i}{dg_k} ; b_k = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dg_k} \frac{d\vec{r}_i}{dt} ; c_0 = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2$$

Укажувајќи на E_k може:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{g}_j \dot{g}_k + \sum_{k=1}^s b_k \dot{g}_k + \frac{1}{2} c_0 \Rightarrow E_k = E_{k2} + E_{k1} + E_{k0}$$

квадратна кин. ен. E_{k2}
 линеарна E_{k1}
 константна E_{k0}

Коеф. $a_{jk} = a_{kj}$ покажуваат симетричен коеф. (метрички тензор). У случају кога
 је сис. ег одговорно дефинирано сис. ег, тоа, значи да су $b_k = 0$ и $c_0 = 0$. Понатаму
 је E_k запишана во квадратна форма лем. др. ег.

$$E_k = E_{k2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{g}_j \dot{g}_k$$

- Бидејќи да је E_k у лем. др. ег или др. ег или у лем. др. ег, квадратна
 форма је симетрично дефинирана.

⑤3. Пролетна организација на м. Улог.

-

- Висотна пресе - Носачу при престоју тежине и сила у фигури, F_{TV}

- Түрлеріне - Нәсілге икезге бөлінгенге ішкіне ішкіне, $\bar{F}_1$

-Түпнүгүрөсүмө ($\vec{F}_R$) - залуу ойт.

1. Сторо́жние Ке́льми́шские ост. И́льме

2. сложные предложения

a) unphysikalisch unphysikalisch unphysikalisch $\vec{F}_C, \vec{F}_{TV}$

д) применяя закон Шерера: $\vec{F}_C, \vec{F}_T$

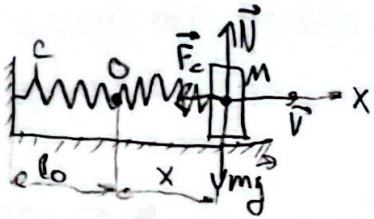
3. Трикужен нейтронен огу.

Упринуцине Нертицине олу. $\vec{F}_C$ и $\vec{F}_R$
-у нестаткој средини децује

4. Принципи и примене огу.

$$-F_C, F_S, F_{TV}$$

54. Свободне неприпуцене организације пошме



10-сродна гербика (незф.)

$$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{G} + \vec{N} \quad / \cdot \vec{c}$$

$$m\ddot{x} = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0, \quad \frac{c}{m} = \omega^2 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sinh(\omega t) + C_2 \omega \cosh(\omega t)$$

Γ $\text{Knyrk-Ha \textit{O}ppehnyzija} [\omega] = T^{-1} = 1 \text{ Hz}$
 $\frac{c}{m} = \omega^2 \rightarrow \ddot{X} + \omega^2 X = 0$
 $\left. \begin{array}{l} t_0 = 0, X(t_0) = X_0, \vec{V}_0 = \dot{X}_0 \vec{e} \end{array} \right\}$
 $C_1 = X_0$ $C_2 = \frac{\dot{X}_0}{\omega}$

$$X = X_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{X}_0}{\omega} \sin(\omega t) \rightarrow \text{г-на косинуса репр. ампл. и смещение}$$

- Ako se y znatno C_1 i C_2 ycaloy: $C_1 = R \sin \alpha$, $C_2 = R \cos \alpha$, godiya se amplitudy ycaloy: $x = R \sin(\omega t + \alpha)$

Величина R је антилигула с. Неприпуштеног ситуација и одређена је

$$R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0}{w}\right)^2}, \quad x \in [-R, R] \quad \text{--- } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$\psi(x) = e^{i(\omega t + \alpha)}$ je faza oscilovanja, a $\psi|_{t=0} = \alpha$ je početna faza

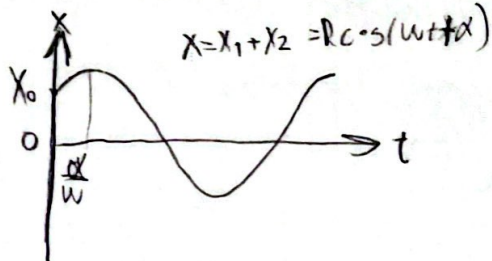
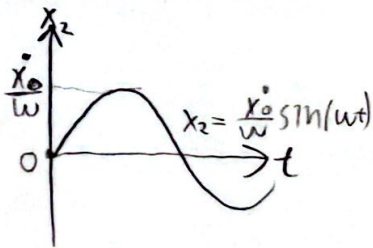
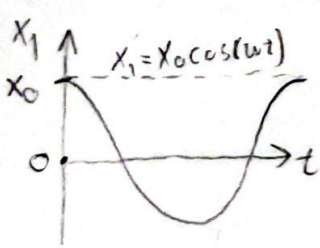
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} ; \quad \chi = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}\right)$$

- Осу. кретања то $\sin$ или $\cos$ homologу се хермитујева

- А. нейтр. протоплазмическ. агу. поддесен мн. сил унаследована су характере.

—суперкомпьютер

$x_1 = x_0 \cos(\omega t)$
 $x_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$
 - фазовый сдвиг $\frac{\pi}{2}$!



— Према важећим правилима измету глас уредитица прилога имене М кроз иницијалску иницијалу НОМ се одређује. Ако су то t_n и t_{n-2} :

$$X(t_n) = X(t_{n-2}) ; \sin(\omega t_n + \alpha) = \sin(\omega t_{n-2} + \alpha), \omega t_n + \alpha = \omega t_{n-2} + \alpha + 2\pi$$

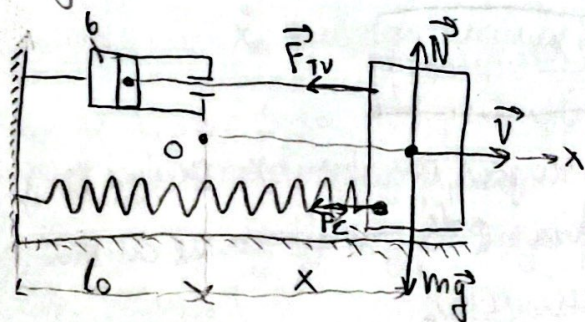
$$T = t_n - t_{n-2} = \frac{2\pi}{\omega} ; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

- особина периода окупационог делне власти
одликује НОБ-а се изостанак

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} - \text{фреквенција осцилација}$$

$$\hookrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

(55) Словогизе пригужено су. Почне пригужити лексички процес.
Својом мисли пригужива.



$\vec{F}_{TV} = -6V$ - сила тяжести направлена вниз
и симметрична

$$m\vec{a} = \vec{F}_C + \vec{F}_{TV} + \vec{G} + \vec{N} / \cdot \vec{c}$$

$$m\ddot{x} = -Cx - b\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{C}{m}x = 0; \boxed{\delta = \frac{b}{2m}} \boxed{\omega^2 = \frac{C}{m}}, \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$x = e^{\lambda t}; \rho(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0, \boxed{\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}}$$

вер. матрица $[D] = T^{-1}$

- 1) Мало затухание - $\delta < \omega$, $\lambda_{1/2}$ не вещ. комплексно
- 2) Большо затухание - $\delta > \omega$, $\lambda_{1/2}$ су реални и различити
- 3) Критични случај - $\delta = \omega$, $\lambda_{1/2}$ су реални и једнаки

* Мало притупљено ($\delta < \omega$)

$$\delta^2 - \omega^2 < 0$$

$\delta^2 - \omega^2 = -p^2$, где p се одлучује $\lambda_{1,2} = -\delta \pm ip$, ^{опште} генерално решење је:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{ipt} + A_2 e^{-ipt}) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(pt) + C_2 \sin(pt)), \text{ где су}$$

$$C_1 = A_1 + A_2, C_2 = i(A_1 - A_2)$$

За одређене почетне услове $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ решење је:

$$x = e^{-\delta t} (C_1 \cos(pt) + C_2 \sin(pt))$$

$$\dot{x} = -\delta e^{-\delta t} (C_1 \cos(pt) + C_2 \sin(pt)) + p e^{-\delta t} (-C_1 \sin(pt) + C_2 \cos(pt))$$

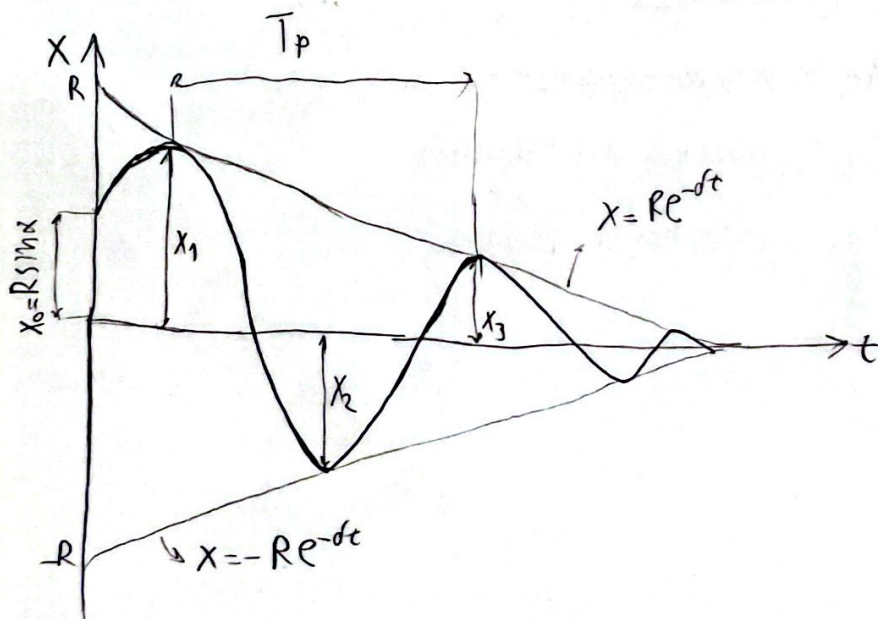
Потом се добија:
$$x = e^{-\delta t} \left(x_0 \cos(pt) + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p} \sin(pt) \right)$$

Упоредно са претходним случајем, овде је такође присутна дејексација. Решење се може представити у облику $x = R e^{-\delta t} \sin(pt + \alpha)$, где R је амплитуда, α је почетна фаза. Константа $e^{-\delta t}$ показује да се амплитуда смањује у времену, па је решење притупљено.

$$C_1 = R \sin \alpha, C_2 = R \cos \alpha, x = R e^{-\delta t} \sin(pt + \alpha), R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{p} \right)^2}, \text{ где } \alpha = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \arctan \frac{p x_0}{\dot{x}_0 + \delta x_0}$$

- Решење је асимптотичко, али није асимптотичко, већ притупљено.

$$R e^{-\delta t} \sin(pt + \alpha) = 0, [e^{-\delta t} = 0 \text{ за } t = \infty], \sin(pt + \alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{t_n = \frac{n\pi - \alpha}{p}} (n=1, 2, \dots)$$



$$\tau_n - \tau_{n-2} = \frac{n\pi - \pi}{p} = \frac{(n-2)\pi - \pi}{p} = \frac{2\pi}{p}, \quad \boxed{T_p = \frac{2\pi}{p}} \rightarrow \text{успешно переносим для } x_0 \neq x(t-T_p)$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T_p = \frac{T}{\sqrt{1-\psi^2}}}, \text{ где } \boxed{\psi = \frac{\delta}{\omega}} - \text{дезгугеннманн калф. упрощения}$$

56. -11-. Сигнал величин и график упрощения.

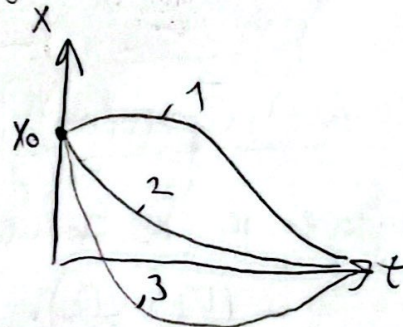
* Временное упрощение ($\delta > \omega$)

$$\delta^2 - \omega^2 > 0, \quad \delta^2 - \omega^2 = q^2, \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm q, \quad x = e^{-\delta t} (A_1 e^{qt} + A_2 e^{-qt}), \quad \boxed{e^{\pm qt} = \text{ch}(qt) \pm \text{sh}(qt)},$$

$$\text{тогда } \boxed{x = e^{-\delta t} [C_1 \text{ch}(qt) + C_2 \text{sh}(qt)]}, \text{ где } C_1 = A_1 + A_2, \quad C_2 = A_1 - A_2.$$

Ф-жа $x(t)$ может быть описана с помощью A_1 и A_2 (C_1 и C_2). Если $x_0 > 0$, то можно увидеть, что x_0 может быть кривой при сигнале:

- Если $x_0 > 0$ ф-жа $x(t)$ имеет вид:
 где не достигнет максимума, затем отбросит,
 где он не упрощается нулю когда время
 неогр. растет. (1)



- Когда $x_0 < 0$ могут возникнуть 2 сигнала:

1. Ф-жа $x(t)$ монотонно отбросит, достигнет нуля, когда время неогр. растет (2)

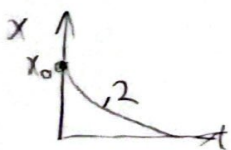
2. Ф-жа $x(t)$ сначала, упрощается нулю, достигнет максимума, затем неогр. растет,
 достигнет максимума, где он не упрощается нулю при $t \rightarrow \infty$ (3)

- Если оба сигнала неограниченно, а $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

* Критический случай ($\delta = \omega$)

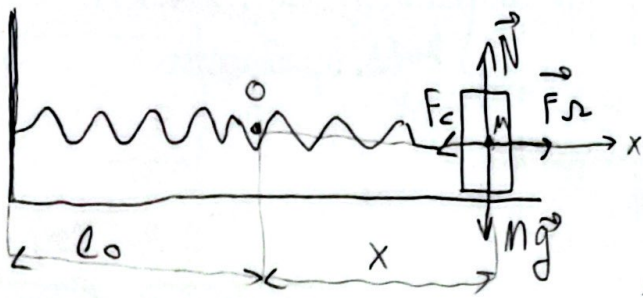
$$\delta^2 - \omega^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta, \quad \boxed{x = e^{-\delta t} (C_1 t + C_2)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (t e^{-\delta t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\delta t}} = 0.$$

Упр. сигналы, которые описываются с помощью δ и ω неограниченно.
 Это критический случай. Кривые неограниченно растут.



- Упрощение, когда $\delta \geq \omega$ и всегда неограниченно.

57. ^{нелінійна}Притягуюча ос. ваг. Нерезонантний сигнал.



- Притягуюча пружина M, m, σ горизонтальної, неваж. ідеальної осі. Притягуюча пружина (k, c) та неваж. осі. Маса m та пружина F_d у ф. t .

з хрм. резон

$$F_{dx}(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad \begin{matrix} F_0 - \text{амплітуда } F_d \\ \Omega - \text{кр. фек.} \end{matrix}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \rightarrow \text{період}$$

$$m\ddot{x} = mg + F_c + F_d + N / \cdot \vec{e}$$

$$m\ddot{x} = -cx + F_{dx}(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cos(\Omega t); \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \quad h = \frac{F_0}{m}$$

$$x_h = \bar{C}_1 \cos(\omega t) + \bar{C}_2 \sin(\omega t)$$

Притягуюча пружина резонанс резонанс осі. Фреленгуза сабелівна ос. у притягуюча осі (ω у Ω).

* Нерезонантний сигнал $\omega \neq \Omega$

$$x_p = C \cos(\Omega t) / \dot{x}_p = -C\Omega \sin(\Omega t), \quad \ddot{x}_p = -C\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

$$C(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) = h \cos(\Omega t)$$

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \rightarrow x_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

- Або же $\omega < \Omega$ осі:

$$x_p = -\frac{h}{\Omega^2 - \omega^2} \cos(\Omega t) = \frac{h}{\Omega^2 - \omega^2} \cos(\Omega t - \pi) \rightarrow$$

Ω резонанс та притягуюча F_d

$$X = \bar{C}_1 \cos(\omega t) + \bar{C}_2 \sin(\omega t) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t), \text{ а также и век}$$

$$X = R \cos(\omega t - \alpha) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t), \text{ где } R \text{ и } \alpha \text{ конст. За}$$

$$\text{Начальные условия таковы: } \dot{X} = -\bar{C}_1 \omega \sin(\omega t) + \bar{C}_2 \omega \cos(\omega t) - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \Omega \sin(\Omega t)$$

Аналогично, $t=0$, $X_0, \dot{X}_0$ даем:

$$\boxed{\bar{C}_1 = X_0 - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}} \quad \boxed{\bar{C}_2 = \frac{\dot{X}_0}{\omega}}$$

Возвращаясь к начальному состоянию:

$$X = \underbrace{X_0 \cos(\omega t)}_{x_1} + \underbrace{\frac{\dot{X}_0}{\omega} \sin(\omega t)}_{x_2} + \underbrace{\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)]}_{x_3}$$

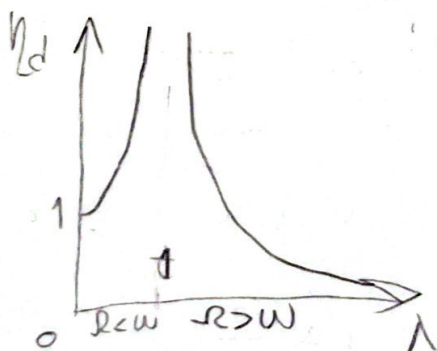
У нас есть три компонента, у нас есть, что такое x_1, x_2, x_3 и амплитуды.

$$X_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) = \frac{h}{\omega^2} \cos(\Omega t); \quad \boxed{\lambda = \frac{\Omega}{\omega}} \text{ коэф. переноса}$$

$$F_0 = C f_{st} = m h; \quad f_{st} = \frac{h}{\omega^2} = C_s; \quad \frac{f_{st}}{1 - \lambda^2} = C_d, \text{ где } C_d \text{ — жесткость}$$

$$\boxed{X_p = C_d \cos(\Omega t)}$$

$$\eta_d = \frac{C_d}{C_s} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \text{ — гев. фактор переноса. Когда } \Omega=0, \lambda=0, \eta_d=1$$



58. Резонансний випадок ($\Omega = \omega$). -||-

$$X_p = t [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)], \quad \ddot{X}_p = 2\Omega (-C \sin(\Omega t) + D \cos(\Omega t)) - \Omega^2 X_p$$

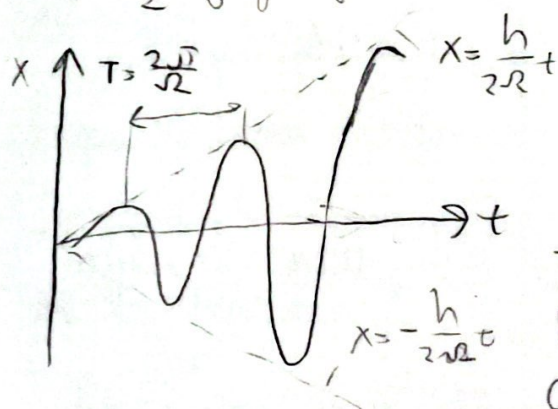
$$-2\Omega C \sin(\Omega t) + 2\Omega D \cos(\Omega t) + (\omega^2 - \Omega^2) X_p = h \cos(\Omega t). \quad \text{Враховуючи } \Omega = \omega:$$

$$-2\Omega C \sin(\Omega t) + 2\Omega D \cos(\Omega t) = h \cos(\Omega t). \quad \text{Синодійсний вираз}$$

$$\sin(\Omega t) \text{ та } \cos(\Omega t) \text{ незалежні.} \quad \boxed{C=0} \quad \boxed{D = \frac{h}{2\Omega}}$$

$$X_p = \frac{h}{2\Omega} t \sin(\Omega t) = \frac{h}{2\Omega} t \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{Виглядає як } X_p \text{ та синусоїда}$$

Резонансний випадок синусоїди з частотою $\Omega = \omega$ має період $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, а амплітуда зростає лінійно з часом.



$$\text{Амплітуда } A = \frac{h}{2\Omega} t, \text{ де } \phi \text{ - фаза}$$

$$\text{виразу } X = \pm \frac{h}{2\Omega} t.$$

- Інтенсивність коливань зростає лінійно з часом, що може призвести до руйнування системи.

- Резонансний випадок виникає, коли частота зовнішньої сили збігається з власною частотою системи.

59. -11-. Түзеткелер ($\Omega \approx \omega, \omega \gg 0$)

$$X_0 = 0, \dot{X}_0 = 0 \rightarrow \boxed{X_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} (\cos(\Omega t) - \cos(\omega t))}$$

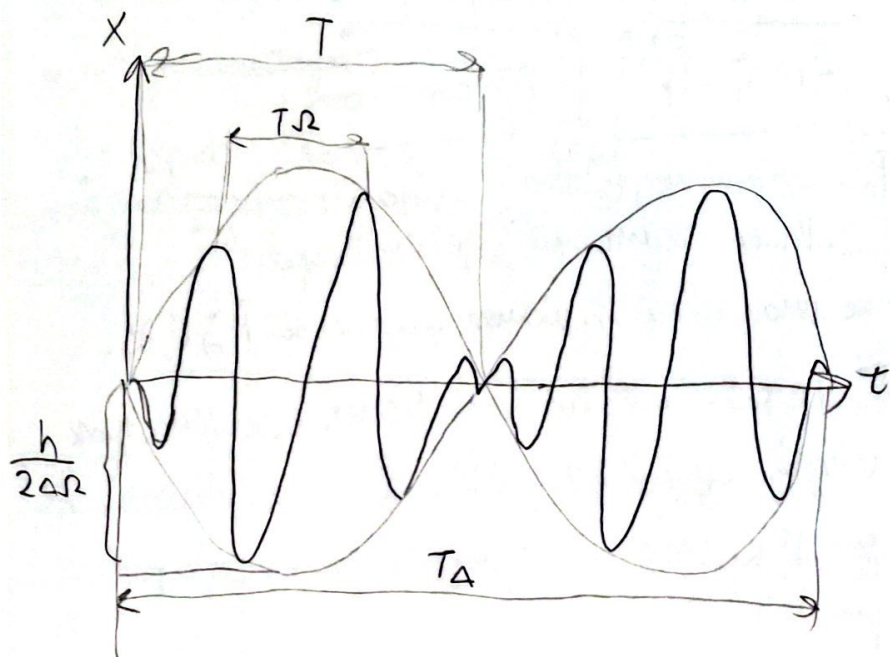
Коргоң $\cos(\Omega t) - \cos(\omega t) = -2 \sin\left(\frac{\Omega + \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega - \omega}{2} t\right)$, улогун се $\boxed{\omega - \Omega = 2\Delta}$
 а сугун: $\sim -2 \sin((\Omega + \Delta)t) \sin(-\Delta t)$. Корго $\omega \approx \Omega$ и $\omega \gg 0, \Delta \neq 0$
 Тоң же: $\approx 2 \sin(\Omega t) \sin(\Delta t)$.

$\omega^2 - \Omega^2 = (\omega - \Omega)(\omega + \Omega) \approx 2\Delta \cdot 2\Omega = 4\Delta\Omega$. Коргоңкелер урбуну:

$$X_p = \left(\frac{h}{2\Delta\Omega} \sin(\Delta t)\right) \sin(\Omega t); \quad \frac{h}{2\Delta\Omega} \sin(\Delta t) \equiv A(t) \rightarrow \boxed{X_p = A(t) \sin(\Omega t)}$$

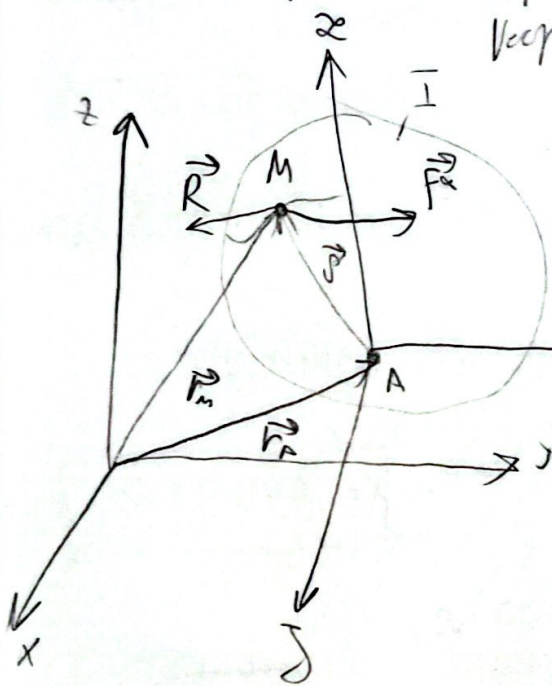
$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}, T_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$. Коргоң $\frac{\omega - \Omega}{2} \ll \omega, T_\Delta \gg T_\Omega$.

За олгоң урбунуңуң урбунуң а нокте урбунуң урбунуң $\boxed{T = \frac{T_\Omega}{\Delta}}$.



60. D) перемішаний кривого і прямого. Перемішана політична історія.

Резултатно м. Така - Притоа посматрајте у односу на Непријателство
 $\uparrow$
 Кор. сматрае веројатно за Окр. Дело.



$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}, \text{ i\u00e7e je } \vec{a} - \text{a\u00fcs. y\u0131r.}$$

Vaje ce koristimo a_p, a_r, a_{cor} .

$$\rightarrow \eta \quad \vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\xi}_p \times \vec{p} + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{p}) \rightarrow \text{универсально}$$

$$\dot{\mathbf{a}}_r = \frac{d_r \vec{V}_r}{dt} = \frac{d_r^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \ddot{\gamma} \vec{\lambda} + \ddot{\eta} \vec{\alpha} + \ddot{\omega} \vec{\psi}$$

$$\vec{a}_{\text{cor}} = 2 \vec{\omega}_p \times \vec{v}_T$$

$$m\vec{a}_p + m\vec{a}_r + m\vec{a}_{cor} = \vec{F}_g + \vec{R};$$

$$m\vec{a}_r = \vec{F}_c + \vec{R} - m\vec{a}_p - m\vec{a}_{cor};$$

$$-m\vec{a}_p = \vec{F}_p^{\text{in}}$$

$$-m\vec{a}_{\text{cor}} = \vec{F}_{\text{cor}}^{\text{in}}$$

црта Корнелије
непознатица !

$$m \vec{a}_T = \vec{F}_a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{scr}^{in}$$

$\vec{F}_p^{in}$ - $\vec{F}_{p, \text{вход}}^{in}$ - $\vec{F}_{p, \text{вход}}^{in}$ - $\vec{F}_{p, \text{вход}}^{in}$ } $\vec{F}_{p, \text{вход}}^{in}$ и $\vec{F}_{p, \text{вход}}^{in}$
 $\vec{F}_{scr}^{in}$ - $\vec{F}_{scr}^{in}$ - $\vec{F}_{scr}^{in}$ } $\vec{F}_{scr}^{in}$

↳ основана на динамике равновесия в. Ионные газосвечи АЭНЗ.

Умн., $\vec{F}_a$ и смт $\vec{F}_a \in \mathbb{R}$ не зависи од аргумента. Норм. система, ако
су $\vec{F}_{scr}^{\text{in}}$ и $\vec{F}_p^{\text{in}}$ одређени. У интер. систему су $\vec{F}_{scr}^{\text{in}} = \vec{F}_p^{\text{in}} = 0$.

У активних ситуаху енергетична енергія, сила сила при виникненні;

- $\vec{F}_{PA} = -m\vec{a}_A$ — уравнение движения

- $\vec{F}_{p_1}^{\text{in}} = -m(\vec{\varepsilon} \times \vec{p})$ - 11-одпункта

• $\vec{F}_B^{\text{in}} = -m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$ - 11-оркентүүсүн

- Авоже кенетеру. (үчүктүм) сунган Азиз унодон берилет:

$$m \ddot{z} = F_z^a + R_z + F_{Pz}^{in} + F_{corz}^{in} \quad , \quad n \dots, z \dots$$

- Авоже унодон үчүктүмү үчүктүмү:

$$\boxed{m \frac{dV_r}{dt} = F_z^a + R_z + F_{Pz}^{in}} \quad ; \quad \boxed{m \frac{V_r^2}{R_k} = F_n^a + R_n + F_{Pn}^{in} + F_{cor n}^{in}} \quad ; \quad \boxed{0 = F_b^a + R_b + F_{Pb}^{in} + F_{cor b}^{in}}$$

* Платон сунган

• Полно кенетеру кенетеру.

$$\vec{\omega}_P \times \vec{P} \perp \rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\epsilon}_P \times \vec{P} - \omega_P^2 \vec{P}}$$

• Однотеру оо кенетеру. оо

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{Pt} + \vec{a}_{Pn} \quad ; \quad a_{Pt} = \overline{M} \epsilon_P, \quad a_{Pn} = \overline{M} \omega_P^2 \quad ; \quad \overline{M} - \text{радиусу } M \text{ оо однотеру}$$

- Авоже $\omega_P = \text{const}$, $a_{Pt} = 0$, $\boxed{a_P = a_{Pn}}$.

• Платон сунган

$$\omega_P = \epsilon_P = 0 \quad ; \quad a_{cor} = 0, \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}_A}$$

$$\boxed{m \vec{\omega}_r = \vec{F}_A \vec{R}}$$

* Первотеру платон сунган

- Мунотеру у оо кенетеру кенетеру кенетеру.

$$\boxed{V_r = a_r = 0}$$

$$\vec{F}_{cor}^{in} = 2 \omega_P \times \vec{V}_r = 0 \rightarrow \boxed{0 = \vec{F}_A + \vec{R} + \vec{F}_P^{in}}$$

(61.) Тезгирин о үргүнчтн Ек үпр псрлүдүктөн кр. Шамме

$$m \vec{a}_r = \vec{F}_a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} - 2m(\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r) / \bullet \vec{v}_r \quad \vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\psi} \vec{e}_\psi$$

$$m \vec{V}_r \cdot \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{F}_c \cdot \vec{V}_r + \vec{R} \cdot \vec{V}_r + \vec{F}_p^H \cdot \vec{V}_r - 2m(\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r / dt$$

↑
grop. Ek

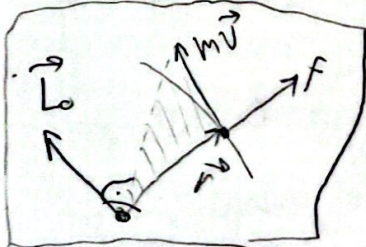
$$\underbrace{m \vec{v}_r \cdot d_t \vec{v}_r}_{\text{ges. } E_k} = \underbrace{\vec{F}^a d\vec{p} + \vec{R} d\vec{p} + \vec{F}^{in} d\vec{p}}_{\text{a. gegen}} ; \quad \boxed{m \vec{v}_r \cdot d_t \vec{v}_r = dr \left(\frac{1}{2} m v_r^2 \right) = dr E_k}$$

$$d\mathbf{r} E_{kr} = dA_r(\vec{F}^a) + dA_r(\vec{R}) + dA_r(\vec{F}_r^{in}) \rightarrow \text{grip. durch}$$

$$\int_{v_{r1}}^{v_{r2}} dv \left(\frac{1}{2} m v_r^2 \right) = \int_{M_1}^{M_2} dA_r (\vec{F}^a) + \int_{M_1}^{M_2} dA_r (\vec{R}) + \int_{M_1}^{M_2} dA_r (\vec{F}_p^{in})$$

$$\frac{1}{2} m v_{r2}^2 - \frac{1}{2} m v_{r1}^2 = A_{m_1 m_2}(\vec{F}^{\text{ext}}) + A_{m_1 m_2}(\vec{R}) + A_{m_1 m_2}(\vec{F}_i^{\text{int}}) \rightarrow \text{Veränderung oder}$$

(62.) Криволинейные интегралы второго рода



Точката се поклања M, m , на координатите центарите $\vec{F}$, при
меѓу центарите y и z на O .

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = 0, \text{ was gelöst } \vec{L}_O = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const, wobei}$$

može izračunati $\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times m \vec{v}_0 = \vec{r} \times m \vec{v}$. Pomisli se gde su tačka:

$\vec{L}_0 = \text{const} \neq 0$ u $\vec{L}_0 = 0$. Ako je $\vec{L}_0 = \text{const} \neq 0$, a yužnati je na konstante $\vec{r}$ u $\vec{v}$,
sledeći je izraz izračunati takođe uzima uoči izračuna valni uoči $0, \perp \vec{L}_0$
Ili polni koru a konstanta polni. Ako je $\vec{L}_0 = 0$, izračunati je izračunati.

Секторна група з Сектору за акумуляцію грошей R
акумуляція вартості у дану ментальність.



$$\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right); \Delta \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \Delta \vec{r})$$

$$S = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \rightarrow \boxed{2\vec{S} = \text{const.}}$$

кон. др. је константна у
супротн. кр. покретног гасељан
центричне силе.

$$\frac{dA}{dt} = C, \boxed{A = Ct + C_1} \rightarrow \text{односна крива криве } \vec{r} \text{ од } \vec{F} \text{ је ортогонална
линеи}$$

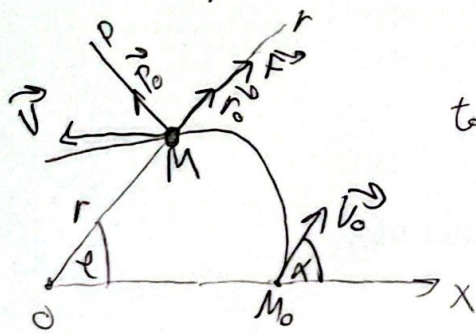
$$\vec{L}_0 = 2m\vec{S} / \cdot \vec{k}, L_{0z} = 2mS_z = C_z; \boxed{S_z = \frac{C_z}{2m}}$$

уштејан
односне

• Јачине

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 & \vec{k} \\ \vec{r} & \vec{p} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \vec{k} = S_z \vec{k}, \boxed{L_{0z} = m r^2 \dot{\varphi}}$$

(63.) D) кретање постојећег гасељан центричне силе



- Упоредно у јачинам координатно

$$t_0: r_0 = OM, \varphi_0 = 0, v_0, \alpha \rightarrow \begin{cases} v_{r0} = \dot{r}_0 = v_0 \cos \alpha \\ v_{p0} = r \dot{\varphi}_0 = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m a_p = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_p \end{cases}$$

- Како је центрична сила одбојна: $F_r = F, F_p = 0$

- Како је -||- одбојна: $F_r = -F, F_p = 0$ p D)

$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}); \boxed{m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = 2S_z = 2C = \text{const.}$$

$$C = \frac{1}{2} r \dot{\varphi} = \frac{1}{2} r_0^2 \dot{\varphi}_0 = \frac{1}{2} r_0 v_{p0} = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin \alpha$$

D) Јачине:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r) \\ r^2 \dot{\varphi} = 2C = \text{const.} \end{cases}$$

64. Бунедо Ҷ-на. Ҳамакун асосе ҷағҳаҷилан Ҳаҷҷиле сие асосе Ҷилуҷиле.

* Бунедо Ҷ-на

- Ҷилу Ҳ. асосе ҷағҳаҷилан Ҷ. сие $\vec{F} = \vec{F}(r)$ Ҳаҷҷиле Бунедо Ҷ-на.

$$\vec{r}_0 \times \vec{m} \vec{v}_0 \neq 0, C \neq 0$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{de} \dot{e} = \frac{dr}{de} \frac{2C}{r^2} = -2C \frac{d}{de} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{dr}{de} \ddot{e} = \frac{2C}{r^2} \frac{d}{de} \left[-2C \frac{d}{de} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{de^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\left[\frac{d^2}{de^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r(r)}{4mC^2} \right] \rightarrow \text{Бунедо Ҷ-на}$$

- Асосе асосе $F_r(r)$, Ҳаҷҷиле асосе $r = r(e)$.

* Ҳ. а. асосе ҷағҳаҷилан Ҳаҷҷиле асосе сие Ҷ.

$$\vec{F} = -f \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad f - \text{Ҷилуҷилане Ҷилу. Ҳаҷҷиле.}$$

r -Ҳаҷҷиле асосе асосе Ҷилуҷилан

$$F_r(r) = -f \frac{mM}{r^2}; \quad \vec{r}_0 (\vec{r} = r \vec{r}_0)$$

$$\frac{d^2}{de^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{fM}{4C^2}; \quad \frac{fM}{4C^2} = \frac{1}{p}; \quad \left[\frac{d^2}{de^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \right] \rightarrow \begin{matrix} \left(\frac{1}{r} \right)_h \rightarrow \text{Ҳаҷҷиле.} \\ \left(\frac{1}{r} \right)_p \rightarrow \text{Ҷилуҷиле.} \end{matrix}$$

$$\left[\left(\frac{1}{r} \right)_h = C_1 \cos e + C_2 \sin e \right] \quad \left[\left(\frac{1}{r} \right)_p = \frac{1}{p} \right]$$

$$\left[\frac{1}{r} = C_1 \cos e + C_2 \sin e + \frac{1}{p} \right]$$

- Ҷа асосе Ҷилуҷиле C_1 ва C_2 асосе Ҷилуҷиле Ҷ-на $\frac{d}{de} \left(\frac{1}{r} \right)$

Множество значений функции D: